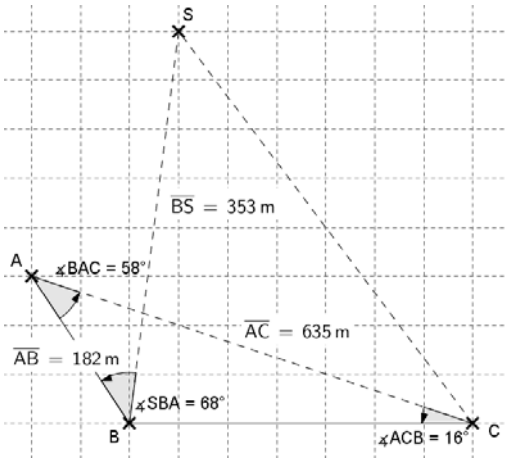
Abschlussprüfung 2015
an den Realschulen in Bayern

Mathematik II — Haupttermin

Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 09.06.2017

Aufgabe A1



A 1.1
Sinus-Satz im Dreieck ABC:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \sphericalangle BAC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \sphericalangle ACB}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin \sphericalangle BAC}{\sin \sphericalangle ACB}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{182\text{ m} \cdot \sin 58°}{\sin 16°} = 560\text{ m}$$

A 1.2
Dreieck ABC:

$\sphericalangle CBA = 180° - 58° - 16° = 106°$ $\sphericalangle CBS = 106° - 68° = 38°$*

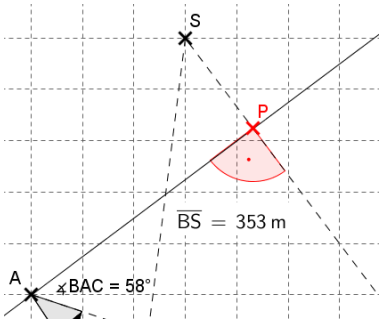
Kosinus-Satz im Dreieck BCS:

$$\overline{SC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BS}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BS} \cdot \cos \sphericalangle CBS$$

$$\Leftrightarrow \overline{SC}^2 = (560^2 + 353^2 - 2 \cdot 560 \cdot 353 \cdot \cos 38°)\text{ m}^2 = 126661\text{ m}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{SC} = 356\text{ m}$$

A 1.3
Durch die kleinste Entfernung (= Abstand) entsteht bei P ein rechter Winkel, so dass sin / cos / tan gelten müssen:
Sinus-Satz im Dreieck BCS:



$$\frac{\sin \sphericalangle SCB}{\overline{BS}} = \frac{\sin \sphericalangle CBS}{\overline{SC}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle SCB = \frac{\sin \sphericalangle CBS \cdot \overline{BS}}{\overline{SC}} = \frac{\sin 38° \cdot 353\text{ m}}{356\text{ m}} = 0{,}61$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle SCB = 37{,}62°$

$180° - 37{,}62° = 142{,}38°$ nicht möglich wegen Innenwinkelsumme*

$\sphericalangle SCA = 37{,}62° - 16° = 21{,}62°$

Dreieck ACP:

$$\sin \sphericalangle SCA = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AP} = \sin \sphericalangle SCA \cdot \overline{AC} = \sin 21{,}62° \cdot 635\text{ m} = 234\text{ m}$$

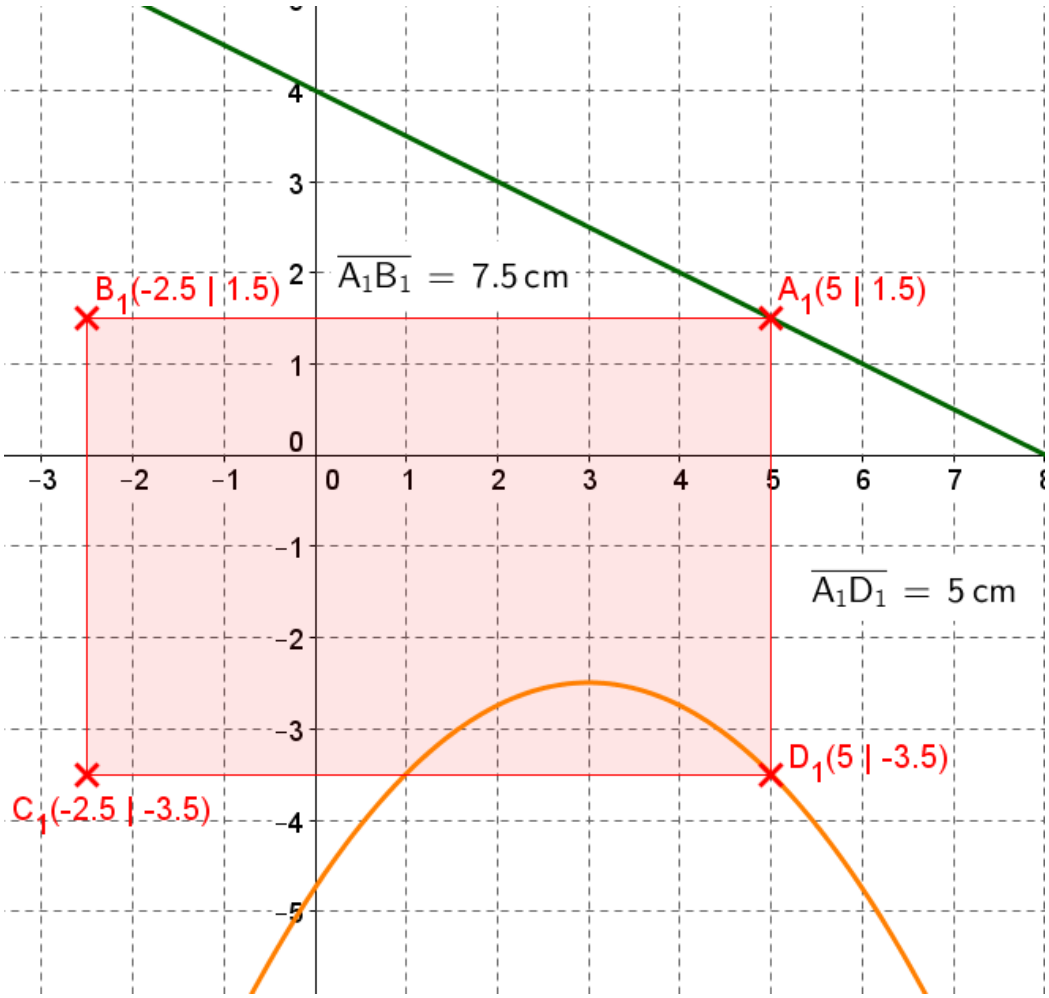
Aufgabe A2

A 2.1 und A 2.2

$y = -0{,}25(x - 3)^2 - 2{,}5$

$\Leftrightarrow\ y = -0{,}25(x^2 - 6x + 9) - 2{,}5$

$\Leftrightarrow\ \mathbf{y = -0{,}25x^2 + 1{,}5x - 4{,}75}$ **g: y = -0,5x + 4**



A 2.3

$\overline{A_nD_n}(x) = \sqrt{(x - x)^2 + (-0{,}5x + 4 - (-0{,}25x^2 + 1{,}5x - 4{,}75))^2}$ LE

$\Leftrightarrow\ \overline{A_nD_n}(x) = (-0{,}5x + 4 + 0{,}25x^2 - 1{,}5x + 4{,}75)$ LE

$\Leftrightarrow\ \overline{A_nD_n}(x) = (0{,}25x^2 - 2x + 8{,}75)$ LE

$u(x) = 2\cdot(\overline{A_nD_n}(x) + \overline{A_nB_n}(x))$ LE

$\Leftrightarrow\ u(x) = 2\cdot(\overline{A_nD_n}(x) + 1{,}5\cdot\overline{A_nD_n}(x))$ LE

$\Leftrightarrow\ u(x) = 2\cdot(0{,}25x^2 - 2x + 8{,}75 + 1{,}5\cdot(0{,}25x^2 - 2x + 8{,}75))$ LE

$\Leftrightarrow\ u(x) = 2\cdot(0{,}25x^2 - 2x + 8{,}75 + 0{,}375x^2 - 3x + 13{,}125)$ LE

$\Leftrightarrow\ u(x) = (0{,}5x^2 - 4x + 17{,}5 + 0{,}75x^2 - 6x + 26{,}25)$ LE

$\Leftrightarrow\ u(x) = (1{,}25x^2 - 10x + 43{,}75)$ LE

A 2.4

$28{,}75\ LE = (1{,}25x^2 - 10x + 43{,}75)\ LE$

$\Leftrightarrow\ 1{,}25x^2 - 10x + 15 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1{,}25 \cdot 15}}{2 \cdot 1{,}25} = \frac{10 \pm \sqrt{25}}{2{,}5}$$

$x_1 = 6 \vee x_2 = 2 \quad \mathbb{L} = \{2;\ 6\}$

A 2.5

$\overline{A_nD_n} = x \quad \Rightarrow A = x \cdot 1{,}5x = 1{,}5x^2$

$\overline{A_nD_n} = 2x \quad \Rightarrow A = 2x \cdot 1{,}5 \cdot 2x = 6x^2$

Zunahme: $6 - 1{,}5 = 4{,}5$

$$\frac{4{,}5 \cdot 100\ \%}{1{,}5} = 300\ \%$$

Aufgabe A3

A 3.1

$V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h$

$\Leftrightarrow\ V_{Zylinder} = (0{,}5 \cdot \overline{AB})^2 \cdot \pi \cdot \overline{BC}$

$\Leftrightarrow\ V_{Zylinder} = (22{,}5^2 \cdot \pi \cdot 2)\ cm^3 = 3180{,}86\ cm^3$

A 3.2

$\overline{NE} = 4{,}5\ cm$ (Radius)

$\overline{FE} = \overline{ME} - \overline{MF} = 13{,}5\ cm - 12\ cm = 1{,}5\ cm$

$\overline{FE} = \overline{NE} - \overline{NF}$

$\Leftrightarrow\ \overline{NF} = \overline{NE} - \overline{FE} = 4{,}5\ cm - 1{,}5\ cm = 3\ cm$

Pythagoras im Dreieck KMF:

$\overline{KF}^2 = \overline{KM}^2 + \overline{MF}^2$

$\Leftrightarrow\ \overline{KF} = (18^2 + 12^2)\ cm^2 = 468\ cm^2$

$\Leftrightarrow\ \overline{KF} = 21{,}63\ cm$

Pythagoras im Dreieck GNF:

$\overline{GF}^2 = \overline{GN}^2 + \overline{NF}^2$

$\Leftrightarrow\ \overline{GF} = (4{,}5^2 + 3^2)\ cm^2 = 29{,}25\ cm^2$

$\Leftrightarrow\ \overline{GF} = 5{,}41\ cm$

$M_{Schirm} = M_{ganzerKegel} - M_{fehlenderKegel} + O_{Halbkugel}$

$\Leftrightarrow\ M_{Schirm} = \overline{KM} \cdot \pi \cdot \overline{KF} - \overline{GN} \cdot \pi \cdot \overline{GF} + 2 \cdot \pi \cdot \overline{GN}^2$

$\Leftrightarrow\ M_{Schirm} = (18 \cdot \pi \cdot 21{,}63 - 4{,}5 \cdot \pi \cdot 5{,}41 + 2 \cdot \pi \cdot 4{,}5^2)\ cm^2$

$\Leftrightarrow\ M_{Schirm} = 1273{,}90\ cm^2$

Aufgabe B1
B 1.1

Dreieck ABC:

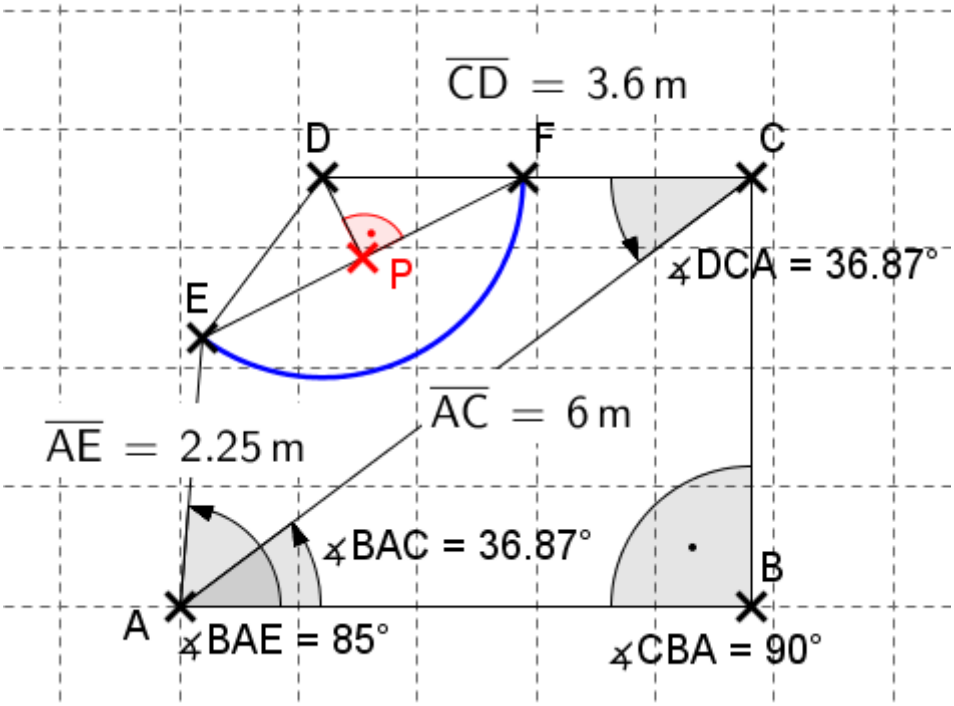
$$\cos \sphericalangle BAC = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = \cos \sphericalangle BAC \cdot \overline{AC} = \cos 36{,}87° \cdot 6\text{ m} = 4{,}80\text{ m}$

$$\sin \sphericalangle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \sin \sphericalangle BAC \cdot \overline{AC} = \sin 36{,}87° \cdot 6\text{ m} = 3{,}60\text{ m}$

B 1.2



$\sphericalangle ACB = 180° - 36{,}87° - 90° = 53{,}13°$
$\sphericalangle DCB = 53{,}13° + 36{,}87° = 90°$
Rechte Winkel bei B und C $\Rightarrow$ parallel!

B 1.3
Kosinus-Satz im Dreieck ACE:

$$\overline{EC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \sphericalangle CAE$$

$\Leftrightarrow \overline{EC}^2 = (2{,}25^2 + 6^2 - 2 \cdot 2{,}25 \cdot 6 \cdot \cos(85° - 36{,}87°))\text{ m}^2$

$\Leftrightarrow \overline{EC}^2 = 23{,}04\text{ m}^2$

$\Leftrightarrow \overline{EC} = 4{,}80\text{ m}$

Sinus-Satz im gleichen Dreieck:

$$\frac{\sin \sphericalangle ECA}{\overline{AE}} = \frac{\sin \sphericalangle CAE}{\overline{EC}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle ECA = \frac{\sin \sphericalangle CAE \cdot \overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\sin (85° - 36{,}87°) \cdot 2{,}25 \text{ m}}{4{,}80 \text{ m}} = 0{,}35$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle ECA = 20{,}43°$

180° - 20,43° = 159,57° nicht möglich da der ganze Winkel bei C bereits 90° hat.

$\sphericalangle DCE = 36{,}87° - 20{,}43° = 16{,}44°$

Kosinus-Satz im Dreieck ECD:

$$\overline{ED}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{DC}^2 - 2 \cdot \overline{EC} \cdot \overline{DC} \cdot \cos \sphericalangle DCE$$

$$\Leftrightarrow \overline{ED}^2 = (4{,}80^2 + 3{,}60^2 - 2 \cdot 4{,}80 \cdot 3{,}60 \cdot \cos 16{,}44°) \text{ m}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{ED}^2 = 2{,}85 \text{ m}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{ED} = 1{,}69 \text{ m}$$

B 1.4

Sinus-Satz im Dreieck ECD:

$$\frac{\sin \sphericalangle EDC}{\overline{EC}} = \frac{\sin \sphericalangle DCE}{\overline{ED}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle EDC = \frac{\sin \sphericalangle DCE \cdot \overline{EC}}{\overline{ED}} = \frac{\sin 16{,}44° \cdot 4{,}80 \text{ m}}{1{,}69 \text{ m}} = 0{,}80$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle EDC^* = 53{,}50°$

und $\Leftrightarrow \sphericalangle EDF = \sphericalangle EDC = 180° - 53{,}50° = 126{,}50°$

Lösung aus Angabe über den Kosinus-Satz im gleichen Dreieck:

$$\overline{EC}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DC}^2 - 2 \cdot \overline{ED} \cdot \overline{DC} \cdot \cos \sphericalangle EDF$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle EDF = \frac{\overline{EC}^2 - \overline{ED}^2 - \overline{DC}^2}{-2 \cdot \overline{ED} \cdot \overline{DC}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle EDF = \frac{4{,}80^2 - 1{,}69^2 - 3{,}60^2}{-2 \cdot 1{,}69 \cdot 3{,}60} = -0{,}60$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle EDF = 126{,}42°$

B 1.5

$A_{ABC} = 0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0{,}5 \cdot 4{,}80\ m \cdot 3{,}60\ m = 8{,}64\ m^2$

$A_{ACE} = 0{,}5 \cdot \sin \sphericalangle CAE \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AE}$

$\Leftrightarrow A_{ACE} = 0{,}5 \cdot \sin (85° - 36{,}87°) \cdot 6\ m \cdot 2{,}25\ m = 5{,}03\ m^2$

$A_{ECD} = 0{,}5 \cdot \sin \sphericalangle DCE \cdot \overline{DC} \cdot \overline{EC}$

$\Leftrightarrow A_{ECD} = 0{,}5 \cdot \sin 16{,}44° \cdot 3{,}60\ m \cdot 4{,}80\ m = 2{,}45\ m^2$

$A_{Dusche} = \overline{ED}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle EDF}{360°} = (1{,}69\ m)^2 \cdot \pi \cdot \frac{126{,}42°}{360°} = 3{,}15\ m^2$

$A_{Fliesen} = 8{,}64\ m^2 + 5{,}03\ m^2 + 2{,}45\ m^2 - 3{,}15\ m^2 = 12{,}97\ m^2$

B 1.6
Minimaler Abstand bedeutet, dass bei P ein rechter Winkel entsteht und damit sin / cos / tan gelten müssen.

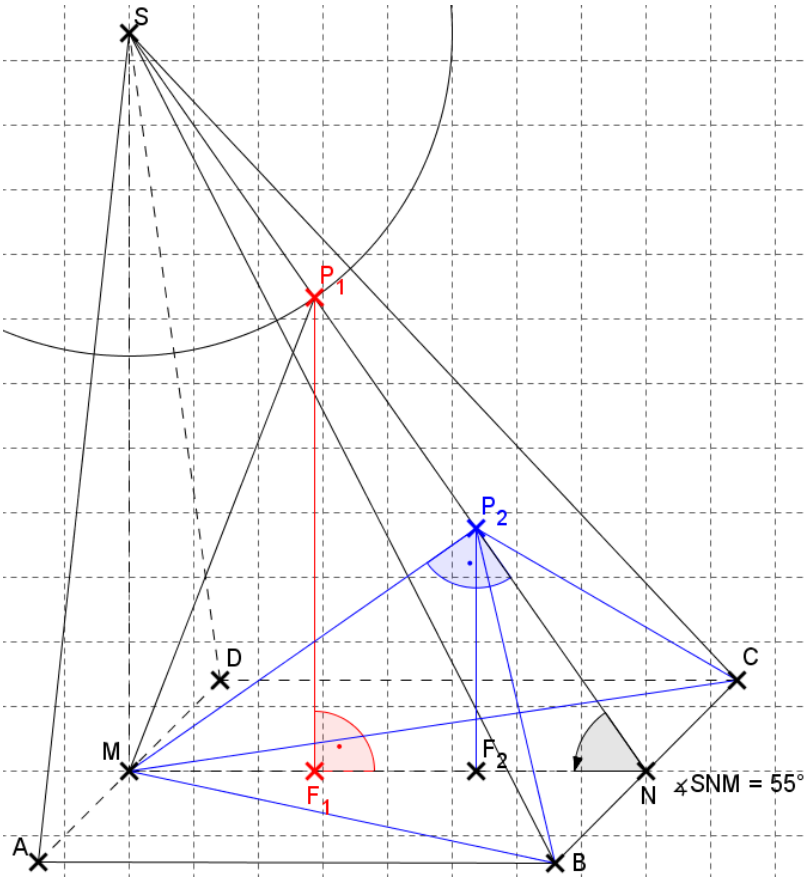
Das Dreieck DEF ist gleichschenklig (da durch den Kreisbogen bestimmt), so dass für die Winkel bei E und F gilt:
$\sphericalangle Basis = (180° - 126{,}42°) : 2 = 26{,}79°$

$$\sin \sphericalangle Basis = \frac{\overline{PD}}{\overline{DE}}$$

$\Leftrightarrow \overline{PD} = \sin \sphericalangle Basis \cdot \overline{DE} = \sin 26{,}79° \cdot 1{,}69\ m = 0{,}76\ m$

Aufgabe B2

B 2.1



Dreieck MNS:

$$\tan \sphericalangle SNM = \frac{\overline{MS}}{\overline{MN}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MS} = \tan \sphericalangle SNM \cdot \overline{MN} = \tan 55° \cdot 8 \text{ cm} = 11{,}43 \text{ cm}$$

$$\cos \sphericalangle SNM = \frac{\overline{MN}}{\overline{SN}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{SN} = \frac{\overline{MN}}{\cos \sphericalangle SNM} = \frac{8 \text{ cm}}{\cos 55°} = 13{,}95 \text{ cm}$$

B 2.2

$\overline{NP_1} = \overline{SN} - \overline{SP_1} = 13{,}95 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 8{,}95 \text{ cm}$

Kosinus-Satz im Dreieck MNP_1:

$$\overline{MP_1}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NP_1}^2 - 2 \cdot \overline{MN} \cdot \overline{NP_1} \cdot \cos \sphericalangle CAE$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP_1}^2 = (8^2 + 8{,}95^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8{,}95 \cdot \cos 55°) \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP_1}^2 = 61{,}97 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP_1} = 7{,}87 \text{ cm} \quad \text{[Angabe: 7,88 cm]}$$

Kosinus-Satz im Dreieck MP_1S:

$$\overline{MS}^2 = \overline{MP_1}^2 + \overline{SP_1}^2 - 2\cdot\overline{MP_1}\cdot\overline{SP_1}\cdot\cos\sphericalangle SP_1M$$

$$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle SP_1M = \frac{\overline{MS}^2 - \overline{MP_1}^2 - \overline{SP_1}^2}{-2\cdot\overline{MP_1}\cdot\overline{SP_1}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle SP_1M = \frac{11{,}43^2 - 7{,}88^2 - 5^2}{-2\cdot 7{,}88\cdot 5} = -0{,}55$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle SP_1M = 123{,}55°$$

B 2.3

$$\overline{NP_n} = \overline{SN} - \overline{SP_n}$$

Sinus im Dreieck F_nNP_n:

$$\sin 55° = \frac{\overline{F_nP_n}(x)}{\overline{NP_n}(x)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{F_nP_n}(x) = \sin 55° \cdot \overline{NP_n}(x)$$

$$\Leftrightarrow \overline{F_nP_n}(x) = \sin 55° \cdot (13{,}95 - x)\ \text{cm}^*$$

$$V(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{NM}\cdot\overline{F_nP_n}(x)$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\sin 55°\cdot(13{,}95 - x)\ \text{cm}^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{64\cdot\sin 55°}{6}\cdot(13{,}95 - x)\ \text{cm}^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = (-8{,}74x + 121{,}89)\ \text{cm}^3$$

*Aufgabensteller rundet an dieser Stelle und bekommt daher $V(x) = (-8{,}75x + 121{,}92)\ \text{cm}^3$ als Ergebnis.

B 2.4

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\cdot\overline{BC}^2\cdot\overline{MS}$$

$$\Leftrightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\cdot 8^2\cdot 11{,}43\ \text{cm}^3 = 243{,}84\ \text{cm}^3$$

$$0{,}34\cdot 243{,}84\ \text{cm}^3 < (-8{,}75x + 121{,}92)\ \text{cm}^3$$

$$\Leftrightarrow 8{,}75x < 121{,}92 - 0{,}34\cdot 243{,}84$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{121{,}92 - 0{,}34\cdot 243{,}84}{8{,}75}$$

$$\Leftrightarrow x < 4{,}46 \quad \mathbb{L} = \{x \mid x < 4{,}46\}$$

Also gilt: $0 < x < 4{,}46$

B 2.5

Gleiche Denkaufgabe wie bei A 1.3 und B 1.6 … Minimaler Abstand bedeutet, dass bei P_2 ein rechter Winkel entsteht und damit sin / cos / tan gelten müssen.

Dreieck MNP_2:

$$\sin 55° = \frac{\overline{MP_2}}{\overline{MN}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP_2} = \sin 55° \cdot \overline{MN} = \sin 55° \cdot 8 \text{ cm} = 6{,}55 \text{ cm}$$

Und zum großen Finale der Pythagoras im Dreieck MP_2S:

$$\overline{SP_2}^2 = \overline{MS}^2 - \overline{MP_2}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{SP_2}^2 = (11{,}43^2 - 6{,}55^2) \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{SP_2}^2 = 87{,}74 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{SP_2} = 9{,}37 \text{ cm}$$