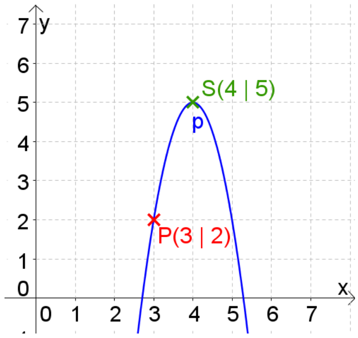
# Abschlussprüfung 2024
# an den Realschulen in Bayern
## Mathematik II Lehrplan+ Haupttermin
## Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 26.11.2024

Aufgabe A1 – ohne Taschenrechner




A 1.1
Auf der Parabel liegen: Scheitelpunkt **S(4|5)** und der Punkt **P(3|2)**.
In die Scheitelpunktsform einsetzen, a berechnen und die Scheitelpunktsform erneut hinschreiben:

$2 = a \cdot (3 - 4)^2 + 5$

$\Leftrightarrow\ 2 = a \cdot (-1)^2 + 5$

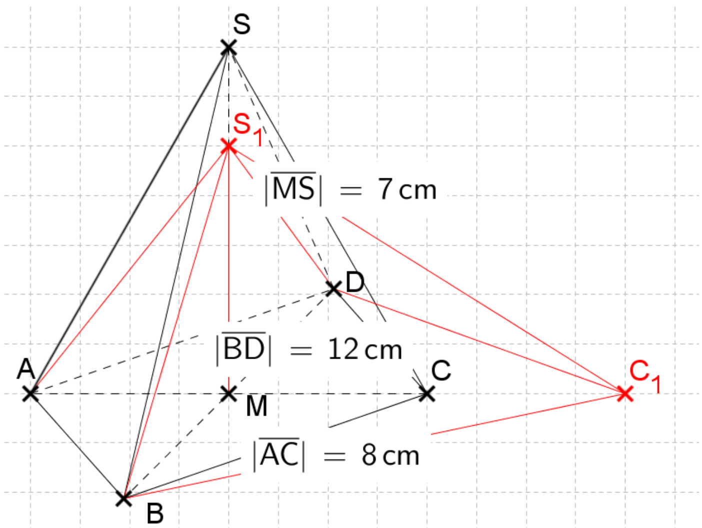
$\Leftrightarrow\ 2 = a + 5 \quad |-5$

$\Leftrightarrow\ a = -3$

Also: p: $y = -3(x - 4)^2 + 5$

A 1.2
z. B. g: $y = 6$

Aufgabe A2 – ohne Taschenrechner
A 2.1




A 2.2

$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (8 + 2x) \cdot (7 - x)\ \text{cm}^3$

$\Leftrightarrow\ V(x) = 2 \cdot (8 + 2x) \cdot (7 - x)\ \text{cm}^2$

$\Leftrightarrow\ V(x) = (16 + 4x) \cdot (7 - x)\ \text{cm}^2$ Also Antwort 3 / C.

Aufgabe A3 – ohne Taschenrechner
Drei Finger haben in Summe eine Breite von ca. 6 cm:


Damit bekommen wir als Höhe: 10 (Kugeln) · 6 cm = 60 cm
Und als Radius: 6 cm : 2 = 3 cm

$$V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$\Leftrightarrow \quad V_{Zylinder} = (3\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 60\text{ cm}$$
$$\Leftrightarrow \quad V_{Zylinder} = 540 \cdot \pi\text{ cm}^3$$

Näherung:

$$\Leftrightarrow \quad V_{Zylinder} = 540 \cdot 3\text{ cm}^3 = 1620\text{ cm}^3$$

Aufgabe A4 – ohne Taschenrechner
Ein Dreieck ist rechtwinklig, wenn der Pythagoras funktioniert. Dabei ist die Hypotenuse die längste Seite:

$$(5\text{ cm})^2 + (12\text{ cm})^2 = (13\text{ cm}^2)$$
$$\Leftrightarrow \quad 25\text{ cm}^2 + 144\text{ cm}^2 = 169\text{ cm}^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 169\text{ cm}^2 = 169\text{ cm}^2 \text{ (w)}$$

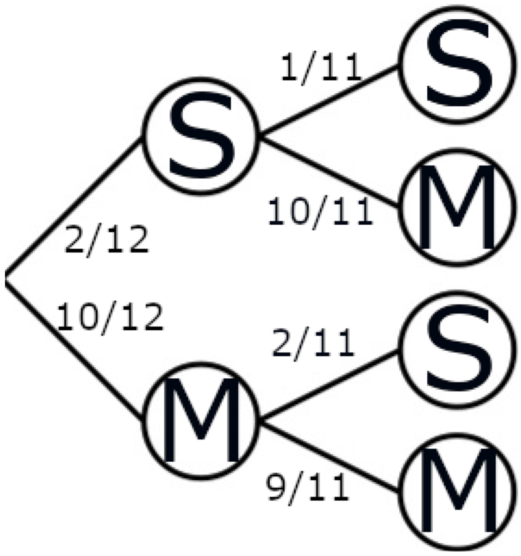
Somit ist das Dreieck rechtwinklig und der rechte Winkel liegt der Hypotenuse $\overline{BC}$ gegenüber. Somit heißt der Punkt beim rechten Winkel A.

Ebenso wäre der Kosinussatz möglich:

$$|\overline{BC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 - 2 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos \sphericalangle BAC$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos \sphericalangle BAC = \frac{|\overline{BC}|^2 - |\overline{AB}|^2 - |\overline{AC}|^2}{-2 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos \sphericalangle BAC = \frac{(13\text{ cm})^2 - (5\text{ cm})^2 - (12\text{ cm})^2}{-2 \cdot 5\text{ cm} \cdot 12\text{ cm}} = 0{,}00$$
$$\Rightarrow \sphericalangle BAC = 90°$$

Aufgabe B1 – mit Taschenrechner

B 1.1




Es handelt sich also um 2 Züge ohne Zurücklegen, daher im rechten Bereich nur noch 11 als Nenner (1 Krapfen ist ja schon weg!)

B 1.2

Möglichkeiten: SS SM MS

Also: $p = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} + \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} + \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11}$

$\Leftrightarrow \quad p = \frac{2}{132} + \frac{20}{132} + \frac{20}{132} = \frac{42}{132} = \frac{7}{22}$ (mit 6 gekürzt!)

Wer weniger schreiben will … nimmt das Gegenereignis MM:

$1 - \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} = 1 - \frac{90}{132} = \frac{42}{132} = \frac{7}{22}$ (mit 6 gekürzt!)

B 1.3

Einzige Möglichkeit: MM

Entweder hat man das eben sowieso schon berechnet, oder eben hier:

Also: $p = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} = \frac{90}{132} = 0{,}6818 = 68{,}18\ \% < 70\ \%$

Martin hat evtl. großen Hunger, hat aber nicht recht.

Aufgabe B2 – mit Taschenrechner
B 2.1

Wir haben unten einen Zylinder, und darüber einen Kegelstumpf. Berechnung von $|\overline{NE}|$ mit dem Vierstreckensatz. Doch zuerst eine kleine Vorarbeit:

$|\overline{SN}| = |\overline{ST}| - |\overline{NT}| = 6{,}5\text{ cm} - 2\text{ cm} = 4{,}5\text{ cm}$

$$\frac{|\overline{NE}|}{|\overline{TD}|} = \frac{|\overline{SN}|}{|\overline{ST}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{NE}| = \frac{|\overline{SN}| \cdot |\overline{TD}|}{|\overline{ST}|} = \frac{4{,}5\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}}{6{,}5\text{ cm}} = 1{,}38\text{ cm}$$

$$V = \underbrace{|\overline{MB}|^2 \cdot \pi \cdot |\overline{TM}|}_{\text{Zylinder}} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot |\overline{TD}|^2 \cdot \pi \cdot |\overline{ST}|}_{\text{ganzer Kegel}} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot |\overline{NE}|^2 \cdot \pi \cdot |\overline{SN}|}_{\text{gestrichelter Kegel}}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \left(1^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 6{,}5 - \frac{1}{3} \cdot 1{,}38^2 \cdot \pi \cdot 4{,}5\right)\text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow \quad V = (4{,}71 + 27{,}23 - 8{,}97)\text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow \quad V = 22{,}97\text{ cm}^3$$

B 2.2
Set 3
Bei 1 entsteht kein Kegelstumpf, bei 2 fehlt ein Kreis, der dafür bei 4 zu viel ist.

Aufgabe B3 – mit Taschenrechner

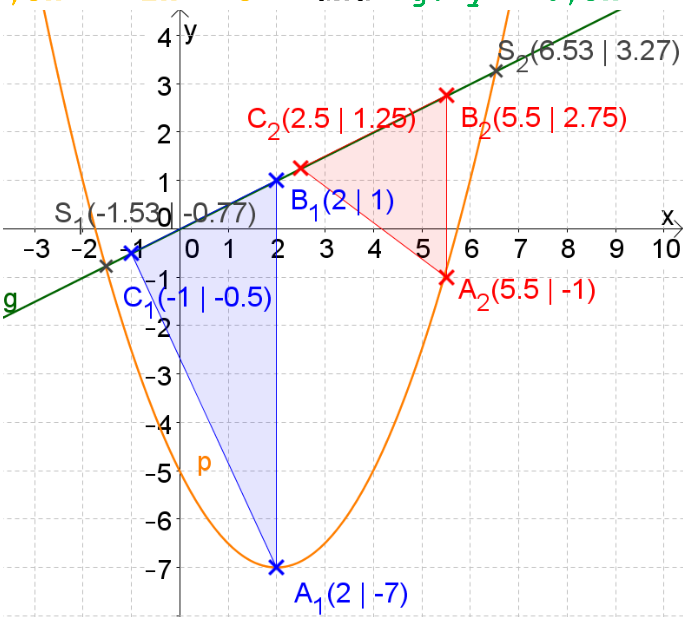
B 3.1 und B 3.2

Gleiches Spiel wie bei A1, P und S einsetzen:

$$-5 = a(4 - 2)^2 - 7$$
$$\Leftrightarrow \quad -5 = 4a - 7 \quad |+7$$
$$\Leftrightarrow \quad 4a = 2 \quad |:4$$
$$\Leftrightarrow \quad a = 0{,}5$$

Also: $y = 0{,}5(x - 2)^2 - 7$

$$\Leftrightarrow \quad y = 0{,}5(x^2 - 4x + 4) - 7$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 0{,}5x^2 - 2x + 2 - 7$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p: y = 0{,}5x^2 - 2x - 5} \quad \text{und} \quad \mathbf{g: y = 0{,}5x}$$



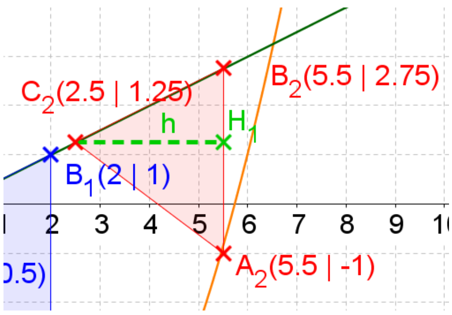

B 3.3

$$|\overline{A_nB_n}|^2 = \sqrt{(x - x)^2 + (0{,}5x - (0{,}5x^2 - 2x - 5))^2}\ \text{cm}^2$$
$$\Leftrightarrow \quad |\overline{A_nB_n}|^2 = \sqrt{(0{,}5x - 0{,}5x^2 + 2x + 5)^2}\ \text{cm}^2$$
$$\Leftrightarrow \quad |\overline{A_nB_n}| = (-0{,}5x^2 + 2{,}5x + 5)\ \text{cm}$$

B 3.4

$$T_{max} = -0{,}5(x^2 - 5x) + 5$$
$$\Leftrightarrow \quad T_{max} = -0{,}5(x^2 - 5x + 2{,}5^2 - 2{,}5^2) + 5$$
$$\Leftrightarrow \quad T_{max} = -0{,}5[(x - 2{,}5)^2 - 6{,}25] + 5$$
$$\Leftrightarrow \quad T_{max} = -0{,}5(x - 2{,}5)^2 + 8{,}125$$

Damit ist für $x = 2{,}5$ die maximale Streckenlänge 8,13 cm.




Da die Höhen h aller Dreiecke 3 cm sind, ist es nun easy:

$A_{max} = 0{,}5 \cdot 8{,}13\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm} = 12{,}20\ \text{cm}^2$

B 3.5
Gesucht ist das Maß der Winkel $\sphericalangle C_nB_nA_n$.

Möglichkeit mit der Steigung der Geraden g:
tan $\sphericalangle$Steigungswinkel = 0,5 Also: $\sphericalangle$Steigungswinkel = 26,57°
$\sphericalangle C_nB_nA_n = 180° - 90° - 26,57° = 63,43°$

Deutlich längere Variante mit der Streckenlänge:

Die Höhe der Dreiecke ist immer noch 3 cm, und $|\overline{C_nB_n}|$ ist immer gleich lang. Beachte, dass $C_n$ den x-Wert (x – 3) hat!

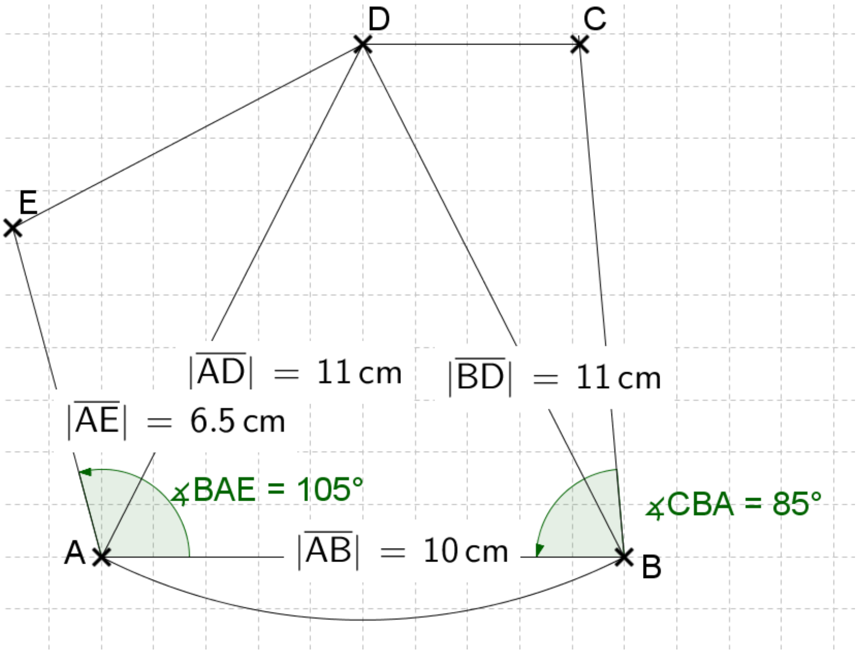
$$|\overline{C_nB_n}|^2 = \sqrt{(x - (x - 3))^2 + (\mathbf{0{,}5x} - (\mathbf{0{,}5 \cdot (x-3)}))^2}\ \text{cm}^2$$
$$\Leftrightarrow\ |\overline{C_nB_n}|^2 = \sqrt{(x - x + 3)^2 + (\mathbf{0{,}5x} - (\mathbf{0{,}5x - 1{,}5}))^2}\ \text{cm}^2$$
$$\Leftrightarrow\ |\overline{C_nB_n}|^2 = \sqrt{(3)^2 + (\mathbf{0{,}5x - 0{,}5x + 1{,}5})^2}\ \text{cm}^2$$
$$\Leftrightarrow\ |\overline{C_nB_n}|^2 = \sqrt{(3)^2 + (\mathbf{1{,}5})^2}\ \text{cm}^2$$
$$\Leftrightarrow\ |\overline{C_nB_n}| = 3{,}35\ \text{cm}^*$$
$$\sin \sphericalangle C_nB_nA_n = \frac{h}{|\overline{C_nB_n}|} = \frac{3\ \text{cm}}{3{,}35\ \text{cm}} = 0{,}89$$ (*Die 3,35 nach dem Wurzelziehen ungerundet im Taschenrechner lassen!)
Also: $\sphericalangle C_nB_nA_n = 63,43°$ L = {63,43°}

B 3.6
Jetzt kommt uns die Variante von eben entgegen, denn es muss gelten:
$|\overline{C_nB_n}| = |\overline{A_nB_n}|$, und wir wissen bereits,
dass $|\overline{C_nB_n}| = 3{,}35$ cm
Oder mit dem in der Angabe gegebenen Winkel, den wir noch nicht verwendet haben:
$$\sin \sphericalangle C_nB_nA_n = \frac{h}{|\overline{C_nB_n}|}$$
$$\Leftrightarrow\ |\overline{C_nB_n}| = \frac{h}{\sin \sphericalangle C_nB_nA_n} = \frac{3\ \text{cm}}{\sin 63{,}43°} = 3{,}35\ \text{cm}$$
Also:
$$3{,}35\ \text{cm} = (-0{,}5x^2 + 2{,}5x + 5)\ \text{cm}$$
$$\Leftrightarrow\ -0{,}5x^2 + 2{,}5x + 1{,}65 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 1{,}65}}{2 \cdot (-0{,}5)}$$
$$\Leftrightarrow\ x_{1/2} = \frac{-2{,}5 \pm \sqrt{9{,}55}}{-1}$$
$$\Rightarrow\ x_1 = -0{,}59 \wedge x_2 = 5{,}59 \quad L = \{-0{,}59;\ 5{,}59\}$$

Aufgabe B4 – mit Taschenrechner

B 4.1




B 4.2

Da $\overline{AB}$ || $\overline{CD}$ (parallel), entsteht ein Z-Winkel, so dass gelten muss: ∢DBA = ∢BDC

Kosinussatz im Dreieck ABD:

$$|\overline{AD}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AD}|^2 - 2 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \cos ∢DBA$$

$$\Leftrightarrow \cos ∢DBA = \frac{|\overline{AD}|^2 - |\overline{AB}|^2 - |\overline{AD}|^2}{-2 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}|}$$

$$\Leftrightarrow \cos ∢DBA = \frac{(11\ cm)^2 - (10\ cm)^2 - (11\ cm)^2}{-2 \cdot 10\ cm \cdot 11\ cm} = 0{,}45$$

$$\Rightarrow ∢DBA = 62{,}96°$$

Dreieck BCD: ∢BDC = ∢DBA = 62,96°

∢CBD = ∢CBA − ∢DBA = 85° − 62,96° = 22,04°

∢DCB = 180° − 62,96° − 22,04° = 95°

Und im gleichen Dreieck noch einen Sinussatz hinterher:

$$\frac{|\overline{CD}|}{\sin ∢CBD} = \frac{|\overline{BD}|}{\sin ∢DCB}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AD}| = \frac{|\overline{BD}| \cdot \sin ∢CBD}{\sin ∢DCB} = \frac{11\ cm \cdot \sin 22{,}04°}{\sin 95°} = 4{,}14\ cm$$

B 4.3

Für den Bogen sind wir erstmal im Dreieck ABD:

$\measuredangle ADB = 180° - 2 \cdot 62{,}96° = 54{,}08°$

$$b = \frac{2 \cdot |\overline{DA}| \cdot \measuredangle ADB \cdot \pi}{360°} = \frac{2 \cdot 11\ cm \cdot 54{,}08° \cdot \pi}{360°} = 10{,}38\ cm$$

Dreieck ADE:

$\measuredangle DAE = 105° - 62{,}96° = 42{,}04°$

$$|\overline{ED}|^2 = |\overline{AE}|^2 + |\overline{AD}|^2 - 2 \cdot |\overline{AE}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \cos \measuredangle DAE$$

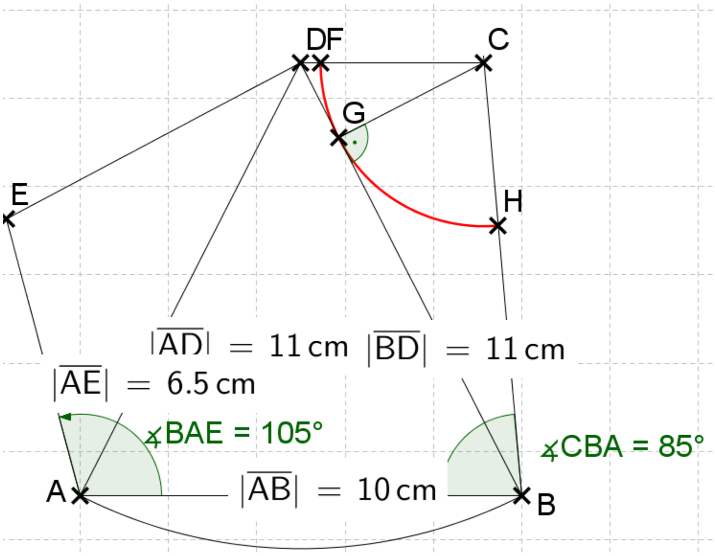
$$\Leftrightarrow |\overline{ED}|^2 = (6{,}5^2 + 11^2 - 2 \cdot 6{,}5 \cdot 11 \cdot \cos 42{,}04°)\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{ED}|^2 = 57{,}04\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{ED}| = 7{,}55\ cm$$

$u = 6{,}5\ cm + 7{,}55\ cm + 11\ cm + 10{,}38\ cm = 35{,}43\ cm$

B 4.4




Beachte den rechten Winkel, der bei G entsteht!

Dreieck BCD:

$$|\overline{BC}|^2 = |\overline{BD}|^2 + |\overline{CD}|^2 - 2 \cdot |\overline{BD}| \cdot |\overline{CD}| \cdot \cos \measuredangle BDC$$

$$\Leftrightarrow |\overline{BC}|^2 = (11^2 + 4{,}14^2 - 2 \cdot 11 \cdot 4{,}14 \cdot \cos 62{,}96°)\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{BC}|^2 = 96{,}73\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{BC}| = 9{,}84\ cm$$

Dreieck BCG:

$$\sin \sphericalangle CBD = \frac{|\overline{CG}|}{|\overline{BC}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{CG}| = \sin \sphericalangle CBD \cdot |\overline{BC}| = \sin 22{,}04° \cdot 9{,}84 \text{ cm} = 3{,}69 \text{ cm}$$

Oder kürzer direkt ins Dreieck GCD:

$$\sin \sphericalangle GDC = \frac{|\overline{CG}|}{|\overline{DC}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{CG}| = \sin \sphericalangle GDC \cdot |\overline{DC}| = \sin 62{,}96° \cdot 4{,}14 \text{ cm} = 3{,}69 \text{ cm}$$

$$A_{Sektor} = \frac{|\overline{CG}|^2 \cdot \sphericalangle DCB \cdot \pi}{360°}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_{Sektor} = \frac{(3{,}69 \text{ cm})^2 \cdot 95° \cdot \pi}{360°} = 11{,}29 \text{ cm}^2$$

B 4.5

Das große Finale ist hier schnell und einfach 😊

$$A_{BCD} = 0{,}5 \cdot |\overline{BD}| \cdot |\overline{DC}| \cdot \sin \sphericalangle BDC$$

$$\Leftrightarrow \quad A_{BCD} = 0{,}5 \cdot 11 \text{ cm} \cdot 4{,}14 \text{ cm} \cdot \sin 62{,}96° = 20{,}28 \text{ cm}^2$$

$$\frac{11{,}29 \text{ cm}^2 \cdot 100 \%}{20{,}28 \text{ cm}^2} = 55{,}67 \%$$