Abschlussprüfung 2023
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Lehrplan+ Nachtermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 24.06.2024

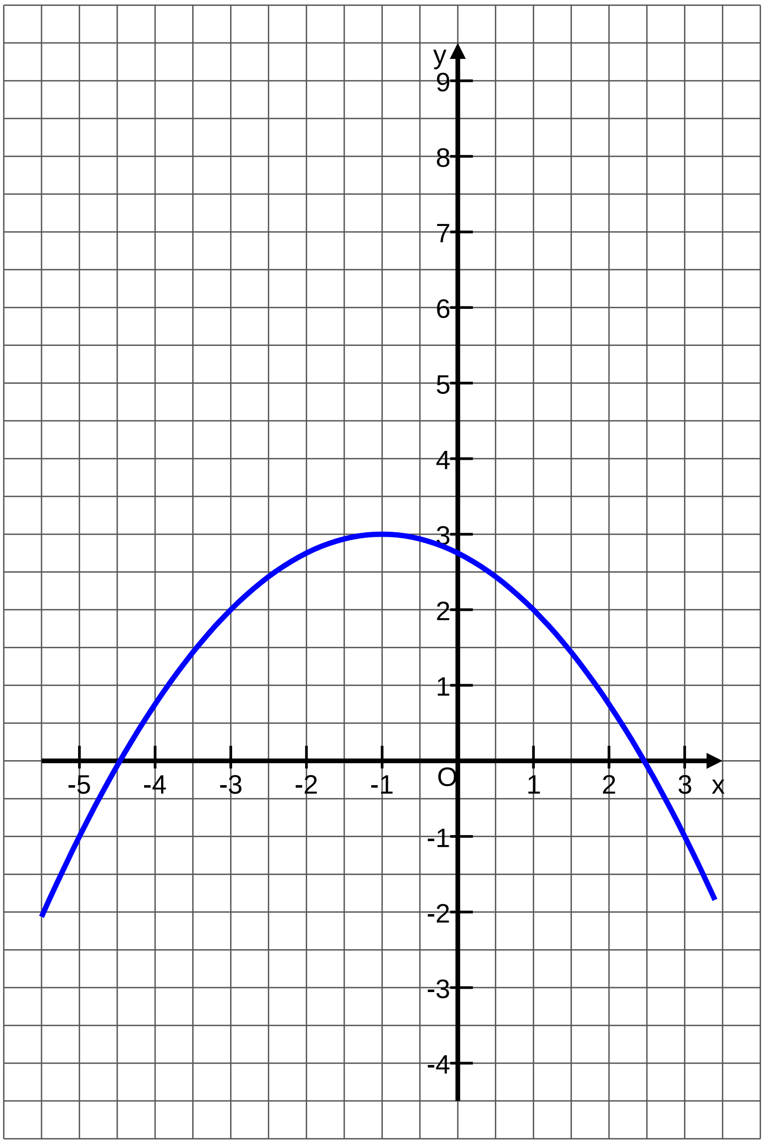
Aufgabe A1 – ohne Taschenrechner

p: $y = -0{,}25(x + 1)^2 + 3$

A 1.1
S einfach ablesen: S(-1|3)

A 1.2
Zeichnen ist schon anspruchsvoller. Ich würde für den angegebenen x-Bereich von -5 bis 3 alle Kopfrechenskills auspacken, eine Wertetabelle erstellen und dann „Freestyle“ zeichnen:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1,00	0,75	2,00	2,75	3,00	2,75	2,00	0,75	-1,00



Aufgabe A2 – ohne Taschenrechner

$0{,}5x^2 + x - 4 = 0$

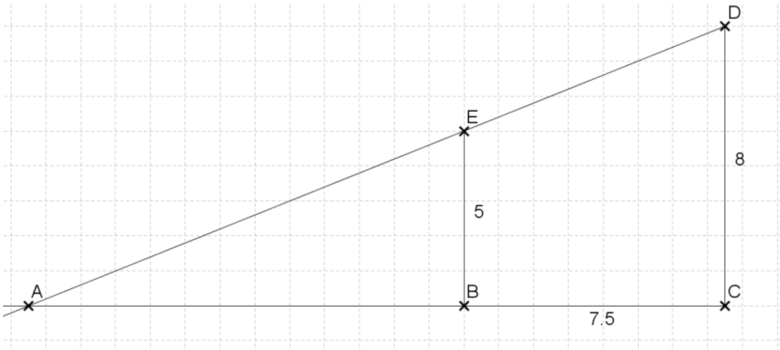
Klarer Fall für die Lösungsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0{,}5}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{1}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 2 \wedge x_2 = -4 \quad \mathbb{L} = \{-4;\ 2\}$$

Aufgabe A3 – ohne Taschenrechner



Klarer Fall für den Vierstreckensatz, und „oben links" kommt das Gesuchte hin. Beachte: Da wir die Parallelen verwenden, müssen wir bei dem anderen Bruch jeweils im Zentrum **A** starten! Los geht's:

$$\text{MZG} \quad \frac{|\overline{\mathbf{A}B}|}{|\overline{\mathbf{A}C}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{CD}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{AB}| = \frac{|\overline{BE}| \cdot |\overline{AC}|}{|\overline{CD}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{|\overline{BE}| \cdot |\overline{AC}|}{|\overline{CD}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5 \cdot (x + 7{,}5)}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{8}x + \frac{37{,}5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{8}x = \frac{37{,}5}{8} \quad | \cdot 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = 37{,}5 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 12{,}5 \quad \text{Also: } |\overline{AB}| = 12{,}5 \text{ cm}$$

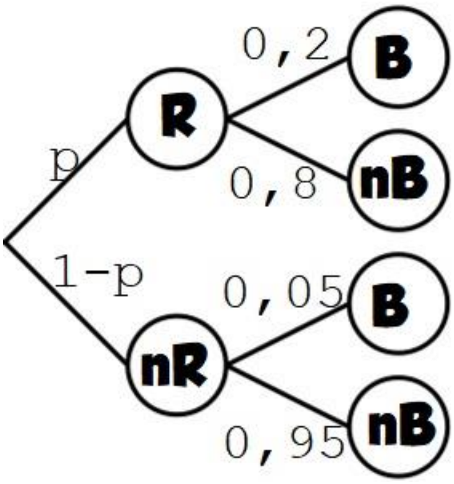
Aufgabe A4 – ohne Taschenrechner

A 4.1
Da 5 Tiere im Spiel sind, gibt es für „Kopf“, „Rumpf“ und „Beine“ jeweils 5 Möglichkeiten.
Also: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$

A 4.2
Von den 125 Möglichkeiten sind genau 5 echte Tiere. Daher gibt es 120 Fantasieviecher, also: $p = \frac{120}{125}$ (= 96 %)

A 4.3
Löwe und Tiger sind Raubtiere. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines Raubtieres liegt also für jede Position bei $\frac{2}{5}$.
Also: $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$ Damit setzen wir das Kreuzerl bei Nr. 4.

Aufgabe B1 – mit Taschenrechner
B 1.1



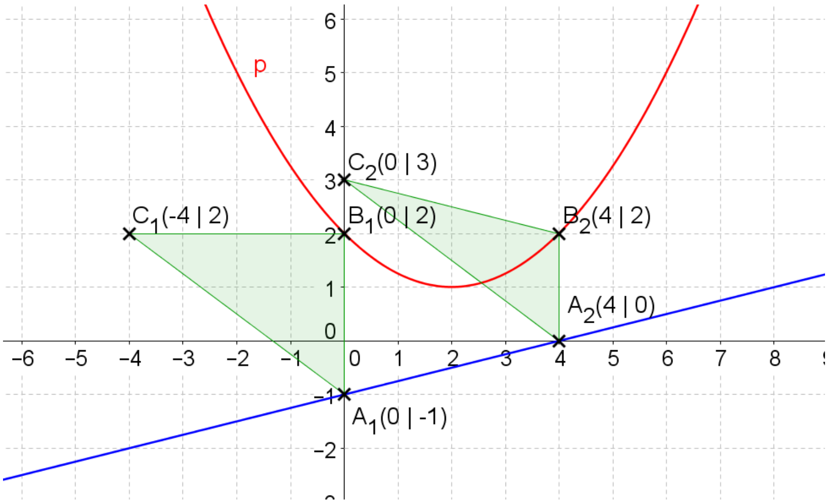
B 1.2
Regional + biologisch: 6 % = 0,06

Also: $p(R) \cdot 0{,}2 = 0{,}06 \quad |:0{,}2$
$\Leftrightarrow p(R) = 0{,}3$ (30 %)

B 1.3
$15000 \cdot 0{,}06 = 900$

Aufgabe B2 – mit Taschenrechner

B 2.1



p: $y = 0{,}25x^2 - x + 2$ g: $y = 0{,}25x - 1$

B 2.2

$$|\overline{A_nB_n}|^2 = \sqrt{(x-x)^2 + (0{,}25x^2 - x + 2 - (0{,}25x - 1))^2}\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{A_nB_n}|^2 = \sqrt{(0{,}25x^2 - x + 2 - 0{,}25x + 1)^2}\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{A_nB_n}| = (0{,}25x^2 - 1{,}25x + 3)\ \text{cm}$$

B 2.3

$$|\overline{A_nC_n}|^2 = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{A_nC_n}| = 5\ \text{cm}$$

Damit suchen wir jetzt die beiden Strecken aus B 2.2 mit genau dieser Länge:

$$0{,}25x^2 - 1{,}25x + 3 = 5$$

$$\Leftrightarrow 0{,}25x^2 - 1{,}25x - 2 = 0$$

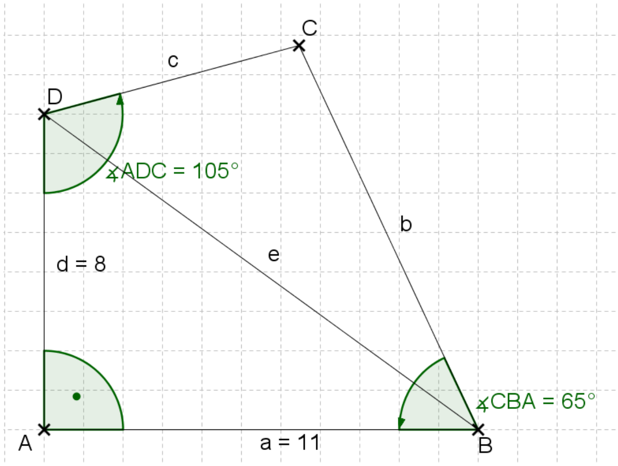
$$x_{1/2} = \frac{1{,}25 \pm \sqrt{(-1{,}25)^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot (-2)}}{2 \cdot 0{,}25}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1{,}25 \pm \sqrt{3{,}5625}}{0{,}5}$$

$$\Rightarrow x_1 = 6{,}27 \wedge x_2 = -1{,}27 \quad \mathbb{L} = \{-1{,}27;\ 6{,}27\}$$

Aufgabe B3 – mit Taschenrechner

B 3.1



$\sphericalangle DCB = 360° - 90° - 65° - 105° = 100°$

Pythagoras im Dreieck ABD:

$$|\overline{BD}|^2 = |\overline{AB}| + |\overline{AD}|$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{BD}|^2 = (11\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2 = 185\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{BD}| = 13{,}60\text{ cm}$$

B 3.2

Wir brauchen die Winkel des oberen Dreiecks bei B und D!

$$\tan \sphericalangle DBA = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AB}|} = \frac{8\text{ cm}}{11\text{ cm}} = 0{,}73 \quad \Rightarrow \sphericalangle DBA = 36{,}03°$$

Damit ist $\sphericalangle ADB = 180° - 90° - 36{,}03° = 53{,}97°$

Und jetzt die Winkel oben, einfach mal beide „auf Vorrat":

$\sphericalangle CBD = 65° - 36{,}03° = 28{,}97° \qquad \sphericalangle BDC = 105° - 53{,}97° = 51{,}03°$

$\sphericalangle DCB = 180° - 28{,}97° - 51{,}03° = 100°$

Damit kennen wir im oberen Dreieck eine Strecke und alle Winkel. Zeit für den doppelten Sinus-Satz:

$$\frac{|\overline{CD}|}{\sin \sphericalangle CBD} = \frac{|\overline{BD}|}{\sin \sphericalangle DCB}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{CD}| = \frac{|\overline{BD}| \cdot \sin \sphericalangle CBD}{\sin \sphericalangle DCB} = \frac{13{,}60\text{ cm} \cdot \sin 28{,}97°}{\sin 100°} = 6{,}69\text{ cm}$$

$$\frac{|\overline{BC}|}{\sin \sphericalangle BDC} = \frac{|\overline{BD}|}{\sin \sphericalangle DCB}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{BC}| = \frac{|\overline{BD}| \cdot \sin \sphericalangle CBD}{\sin \sphericalangle BDC} = \frac{13{,}60\text{ cm} \cdot \sin 51{,}03°}{\sin 100°} = 10{,}74\text{ cm}$$

B 3.3

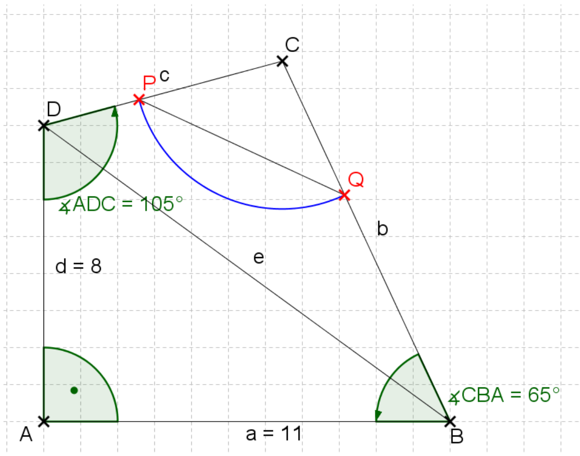
$A_{ABD} = 0{,}5 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| = 0{,}5 \cdot 11\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 44\text{ cm}^2$

$A_{BCD} = 0{,}5 \cdot \sin \sphericalangle DCB \cdot |\overline{CD}| \cdot |\overline{BC}|$

$\Leftrightarrow \quad A_{BCD} = 0{,}5 \cdot \sin 100° \cdot 6{,}69\text{ cm} \cdot 10{,}74\text{ cm} = 35{,}38\text{ cm}^2$

Also: $A_{ABCD} = 44\text{ cm}^2 + 35{,}38\text{ cm}^2 = 79{,}38\text{ cm}^2$
[kleine Abweichung, Aufgabensteller hat das obere Dreieck mit anderen Strecken gerechnet]

B 3.4



B 3.5

$b = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle DCB}{360°} = 2 \cdot 4\text{ cm} \cdot \pi \cdot \frac{100°}{360°} = 6{,}98\text{ cm}$

Die fehlende Strecke gönnt uns der Kosinussatz:

$|\overline{PQ}|^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos \sphericalangle DCB$

$\Leftrightarrow \quad |\overline{PQ}|^2 = (4\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2 - 2 \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot \cos 100°$

$\Leftrightarrow \quad |\overline{PQ}|^2 = 37{,}56\text{ cm}^2$

$\Leftrightarrow \quad |\overline{PQ}| = 6{,}13\text{ cm}^2$

Damit ist der gesuchte Umfang $u = 6{,}98\text{ cm} + 6{,}13\text{ cm} = 13{,}11\text{ cm}$

B 3.6

$A_{Figur} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle DCB}{360°} - 0{,}5 \cdot \sin \sphericalangle DCB \cdot r \cdot r$

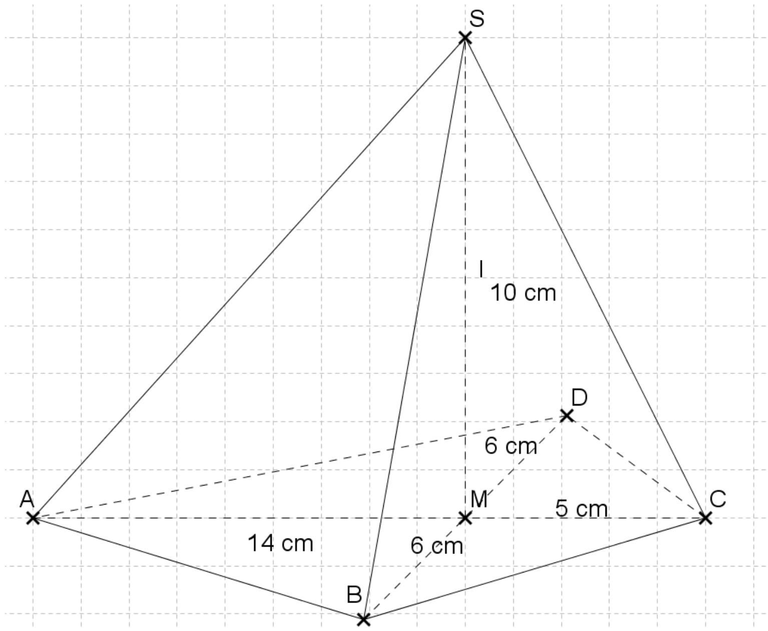
$\Leftrightarrow \quad A_{Figur} = (4\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot \frac{100°}{360°} - 0{,}5 \cdot \sin 100° \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}$

$\Leftrightarrow \quad A_{Figur} = 6{,}08\text{ cm}^2$

$\frac{6{,}08\text{ cm}^2 \cdot 100\ \%}{79{,}37\text{ cm}^2} = 7{,}66\ \%$

Aufgabe B4 – mit Taschenrechner

B 4.1



Pythagoras im Dreieck MCS:

$$|\overline{CS}|^2 = |\overline{MC}| + |\overline{MS}|$$

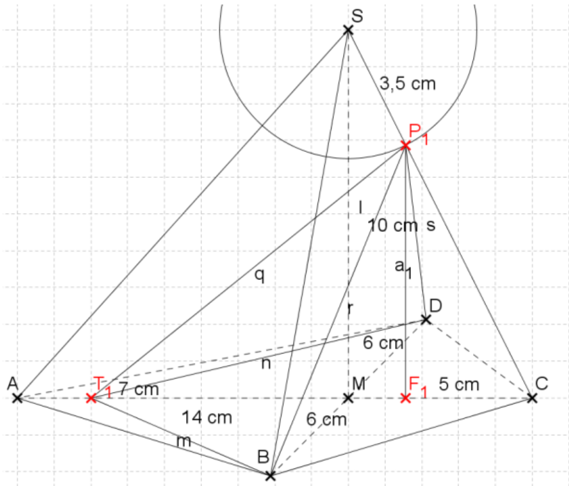
$$\Leftrightarrow |\overline{CS}|^2 = (5\ \text{cm})^2 + (10\ \text{cm})^2 = 125\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{CS}| = 11{,}18\ \text{cm}$$

Wir bleiben im gleichen Dreieck:

$$\tan \sphericalangle SCA = \frac{|\overline{MS}|}{|\overline{MC}|} = \frac{10\ \text{cm}}{5\ \text{cm}} = 2 \quad \Rightarrow \sphericalangle SCA = 63{,}43°$$

B 4.2



$|\overline{CP_1}| = 11{,}18\text{ cm} - 3{,}5\text{ cm} = 7{,}68\text{ cm}$ $|\overline{CT_1}| = 5\text{ cm}+7\text{ cm}=12\text{ cm}$

$\sphericalangle SCA = 63{,}43°$

Wir kennen also im Dreieck T_1CP_1 zwei Seiten und ihren eingeschlossenen Winkel. Klarer Fall für den Kosinussatz:

$$|\overline{P_1T_1}|^2 = |\overline{CT_1}|^2 + |\overline{CP_1}|^2 - 2 \cdot |\overline{CT_1}| \cdot |\overline{CP_1}| \cdot \cos \sphericalangle SCA$$

$$\Leftrightarrow |\overline{P_1T_1}|^2 = (12\text{ cm})^2 + (7{,}68\text{ cm})^2 - 2 \cdot 12\text{ cm} \cdot 7{,}68\text{ cm} \cdot \cos \sphericalangle 63{,}43°$$

$$\Leftrightarrow |\overline{P_1T_1}|^2 = 120{,}54\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{P_1T_1}| = 10{,}98\text{ cm}$$

B 4.3

$$V_{alles} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$$

$$\Leftrightarrow V_{alles} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}| \cdot |\overline{MS}|$$

$$\Leftrightarrow V_{alles} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 14\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 280\text{ cm}^3$$

$$\sin \sphericalangle SCA = \frac{|\overline{F_1P_1}|}{|\overline{CP_1}|}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{F_1P_1}| = \sin 63{,}43° \cdot 7{,}68\text{ cm} = 6{,}87\text{ cm}$$

$$V_{klein} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$$

$$\Leftrightarrow V_{klein} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overline{CT_1}| \cdot |\overline{BD}| \cdot |\overline{F_1P_1}|$$

$$\Leftrightarrow V_{klein} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} \cdot 6{,}87\text{ cm} = 164{,}88\text{ cm}^3$$

Achtung: Die Frage ist „um wie viel kleiner“!

$$\frac{164{,}88\text{ cm}^3 \cdot 100\ \%}{280\text{ cm}^3} = 58{,}89\ \% \quad \text{Also: } 100\ \% - 58{,}89\ \% = 41{,}11\ \%$$

B 4.4
Schreiben wir mal die beiden Strecken, die im Spiel sind, allgemein auf:

$|\overline{CP_n}| = 11{,}18 \text{ cm} - 0{,}5x$ $\quad |\overline{CT_n}| = 5 \text{ cm} + x$

Und die müssen jetzt gleich lang sein…
Also: $11{,}18 \text{ cm} - 0{,}5x = 5 + x$

$\Leftrightarrow 6{,}18 = 1{,}5x$

$\Leftrightarrow x = 4{,}12$

B 4.5
Gehen wir ins Dreieck BDT_3:
Wenn der Winkel bei T_3 das Maß 90° haben soll, dann haben beide Winkel bei B und D jeweils 45°. Also sind wir nur noch einen Tangens vom Ende der AP entfernt! Gehen wir ins Dreieck BMT_3, das bei M einen rechten Winkel hat:

$$\tan \sphericalangle DBT_3 = \frac{|\overline{MT_3}|}{|\overline{BM}|}$$

$\Leftrightarrow |\overline{MT_3}| = \tan \sphericalangle DBT_3 \cdot |\overline{BM}| = \tan 45° \cdot 6 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$

Damit ist das gesuchte x = 6.