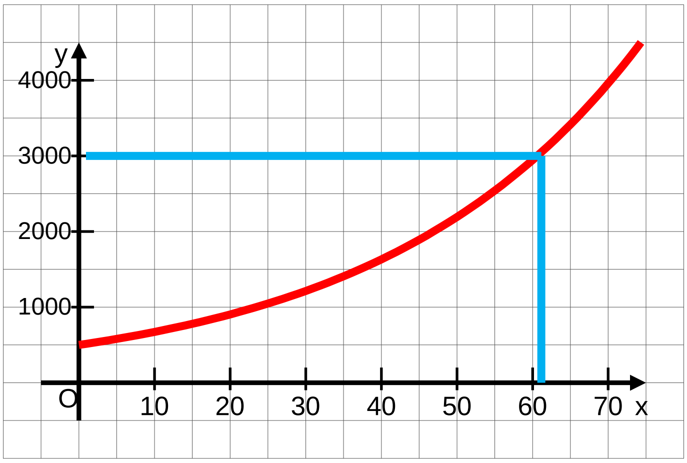
Abschlussprüfung 2018
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Nachtermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 07.06.2019

Aufgabe A1

A 1.1

x	0	10	20	35	50	70
y	500	700	900	1400	2200	4000



A 1.2

$500 \cdot 6 = 3000$

Nach ca. 61 Jahren.

Zweig I:

$3000 = 500 \cdot 1{,}03^x$

$\Leftrightarrow \; 6 = 1{,}03^x$

$\Leftrightarrow \; x = \log_{1{,}03} 6 = 60{,}62 \quad \mathbb{L} = \{61\}$

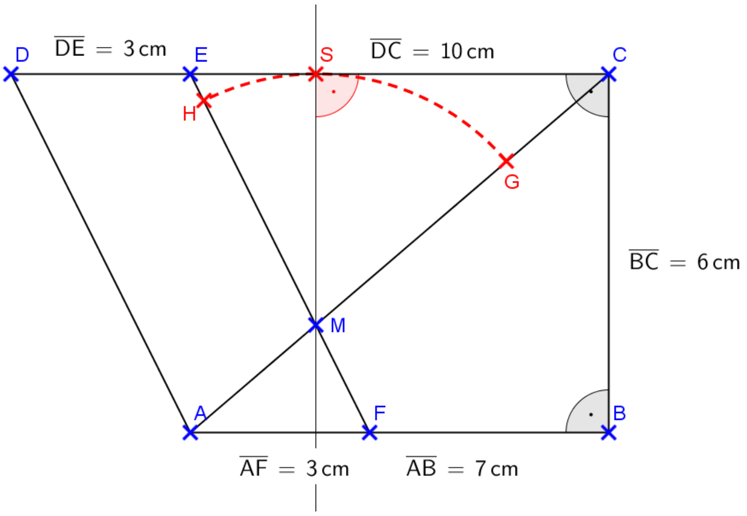
A 1.3

$1{,}03^7 = 1{,}22987$

Also um 22,99 % (23 %)

Aufgabe A2

A 2.1



Pythagoras im Dreieck ABC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (7\ \text{cm})^2 + (6\ \text{cm})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 85\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 9{,}22\ \text{cm}$$

Dreieck ABC:

$$\tan \sphericalangle ACB = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{7\ \text{cm}}{6\ \text{cm}} = 1{,}67 \Rightarrow \sphericalangle ACB = 49{,}40°$$

Damit ist $\sphericalangle DCA = \varphi = 90° - 49{,}40° = 40{,}60°$

A 2.2

Vierstreckensatz im Dreieck ACD:

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{7\ \text{cm} \cdot 9{,}22\ \text{cm}}{10\ \text{cm}} = 6{,}45\ \text{cm}$$

A 2.3

Sinus im Dreieck MCS:

$$\sin \varphi = \frac{\overline{MS}}{\overline{MC}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MS} = \sin \varphi \cdot \overline{MC} = \sin 40{,}60° \cdot 6{,}45\ \text{cm} = 4{,}20\ \text{cm}$$

Kosinus-Satz im Dreieck MCE als Vorarbeit:

$$\overline{ME}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{CE}^2 - 2 \cdot \overline{MC} \cdot \overline{CE} \cdot \cos \varphi$$

$$\Leftrightarrow \overline{ME}^2 = (6{,}45\ \text{cm})^2 + (7\ \text{cm})^2 - 2 \cdot (6{,}45\ \text{cm}) \cdot (7\ \text{cm}) \cdot \cos 40{,}60°$$

$$\Leftrightarrow \overline{ME}^2 = 22{,}04\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{ME} = 4{,}69\ \text{cm}$$

Und gleich nochmal, jetzt aber mit dem Ziel den entscheidenden Winkel zu bekommen:

$$\overline{CE}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{ME}^2 - 2 \cdot \overline{MC} \cdot \overline{ME} \cdot \cos \sphericalangle CME$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle CME = \frac{\overline{CE}^2 - \overline{MC}^2 - \overline{ME}^2}{-2 \cdot \overline{MC} \cdot \overline{ME}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle CME = \frac{(7\ \text{cm})^2 - (6{,}45\ \text{cm})^2 - (4{,}69\ \text{cm})^2}{-2 \cdot 6{,}45\ \text{cm} \cdot 4{,}69\ \text{cm}} = 0{,}24$$

$$\Rightarrow \sphericalangle CME = 76{,}04°$$

Jetzt der leichte Abstauber am Ende:

$$b = 2 \cdot \overline{MS} \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle CME}{360°} = 2 \cdot 4{,}20\ \text{cm} \cdot \pi \cdot \frac{76{,}04°}{360°} = 5{,}57\ \text{cm}$$

Aufgabe A3
Sehr viel Text ... das kann ich auch ;-)
Was ist die eigentliche Frage? Eigentlich „nur", wie viel Sand da unten drin ist.

Im unteren Bereich befindet sich ein Kegel (leer) und jeweils voll ein Zylinder und eine Halbkugel.

Bei der Halbkugel ist alles gegeben:

$$V_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \overline{CM}^3 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot (10\ mm)^3 \cdot \pi = 2094\ mm^3$$

Für den Zylinder fehlt uns die Höhe. Wir brauchen also zuerst die Höhe des Kegels, um dann die fehlende Höhe berechnen zu können.

Den 2 mm – Spalt können wir bei der Höhenberechnung ignorieren, auch 1 mm weiter links oder rechts bleibt die Gegenkathete des Winkels ∢FBS gleich lang. Allerdings müssen wir 1 mm vom Radius abziehen, sonst hat das Dreieck keinen rechten Winkel mehr*.

Tangens im linken Kegeldreieck:

$$\tan \sphericalangle FBS = \frac{h_{Kegel}}{r_{Kegel}}$$

$$\Leftrightarrow h_{Kegel} = \tan \sphericalangle FBS \cdot r_{Kegel} = \tan 59° \cdot 9^*\ mm = 15\ mm$$

Damit ist $h_{Zylinder} = 50\ mm - 15\ mm - 10\ mm = 25\ mm$

$$V_{Zylinder} = r_{Zylinder}^2 \cdot \pi \cdot h_{Zylinder} = (10\ mm)^2 \cdot \pi \cdot 25\ mm = 7854\ mm^3$$

Damit ist $V_{Sand} = 2094\ mm^3 + 7854\ mm^3 = 9948\ mm^3$

$$9948\ mm^3 : 50\ \frac{mm^3}{s} = 199\ s$$

Also 3 Minuten und 19 Sekunden. Die Zeit läuft!

Aufgabe B1:

B 1.1

I $\quad 10 = 0{,}25 \cdot (-6)^2 + b \cdot (-6) + c$

$\quad 10 = 9 - 6b + c$

$\quad c = 6b + 1$

II $\quad -5 = 0{,}25 \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$

$\quad -5 = 4 + 4b + c$

$\quad c = -4b - 9$

I = II $\quad 6b + 1 = -4b - 9$

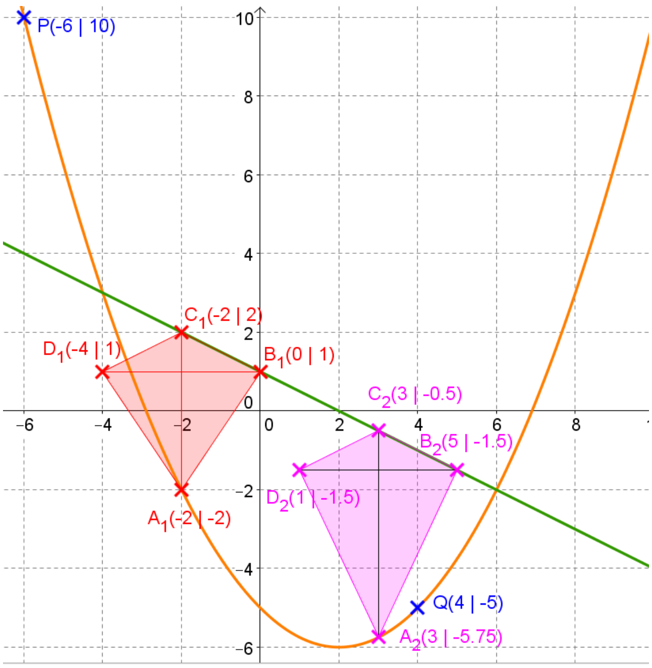
$\quad 10b = -10$

$\quad b = -1$

b in I $\quad c = 6 \cdot (-1) + 1 = -5$

Damit ist **p: $y = 0{,}25x^2 - x - 5$** (und **g: $y = -0{,}5x + 1$**)

B 1.2



B 1.3

Das Rechnen ist hier nicht das Problem ... eher die Vorüberlegungen...

Wir stellen die Punkte B_n dar und ziehen dann vom y-Wert **4** ab:

x-Wert: x-Wert von A_n + 2

y-Wert: Punkt auf g mit dem x-Wert von A_n „x + 2"

Also: $B_n(x + 2 \mid -0{,}5 \cdot (x + 2) + 1)$

$\qquad B_n(x + 2 \mid -0{,}5x)$

Und damit $D_n(x + 2 \mathbf{- 4} \mid -0{,}5x) \Rightarrow D_n(x - 2 \mid -0{,}5x)$

B 1.4

$\overline{B_nD_n} = 4$ LE und $\overline{A_nC_n}$ ist der Abstand von p und g

$$A(x) = 0{,}5 \cdot \overline{A_nC_n} \cdot \overline{B_nD_n}$$
$$\Leftrightarrow A(x) = 0{,}5 \cdot \sqrt{(x - x)^2 + (-0{,}5x + 1 - (0{,}25x^2 - x - 5))^2} \cdot 4 \text{ FE}$$
$$\Leftrightarrow A(x) = 0{,}5 \cdot \sqrt{(-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 6)^2} \cdot 4 \text{ FE}$$
$$\Leftrightarrow A(x) = 0{,}5 \cdot (-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 6) \cdot 4 \text{ FE}$$
$$\Leftrightarrow A(x) = (-0{,}5x^2 + x + 12) \text{ FE}$$

B 1.5

$\overline{A_nC_n} = (-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 6)$ LE

$$T_{max} = -0{,}25(x^2 - 2x) + 6$$
$$\Leftrightarrow T_{max} = -0{,}25(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 6$$
$$\Leftrightarrow T_{max} = -0{,}25[(x - 1^2) - 1] + 6$$
$$\Leftrightarrow T_{max} = -0{,}25[(x - 1^2) + 6{,}25$$

Damit ist $\overline{A_nC_n}$ (max) = 6,25 LE für x = 1

$B_n(x + 2|-0{,}5x)$ (aus B 1.3) $B_1(1 + 2|-0{,}5 \cdot 1)$ also $B_1(3|-0{,}5)$

B 1.6

$\overline{A_nC_n} = 1{,}5 \cdot \overline{B_nD_n}$ LE = 1,5 · 4 LE = 6 LE

Also:

$$\overline{A_nC_n} = (-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 6) \text{ LE}$$
$$6 \text{ LE} = (-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 6) \text{ LE}$$
$$\Leftrightarrow -0{,}25x^2 + 0{,}5x = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 - 4 \cdot (-0{,}25) \cdot 0}}{2 \cdot (-0{,}25)} = \frac{-0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25}}{-0{,}5}$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 2 \qquad \mathbb{L} = \{0;2\}$$

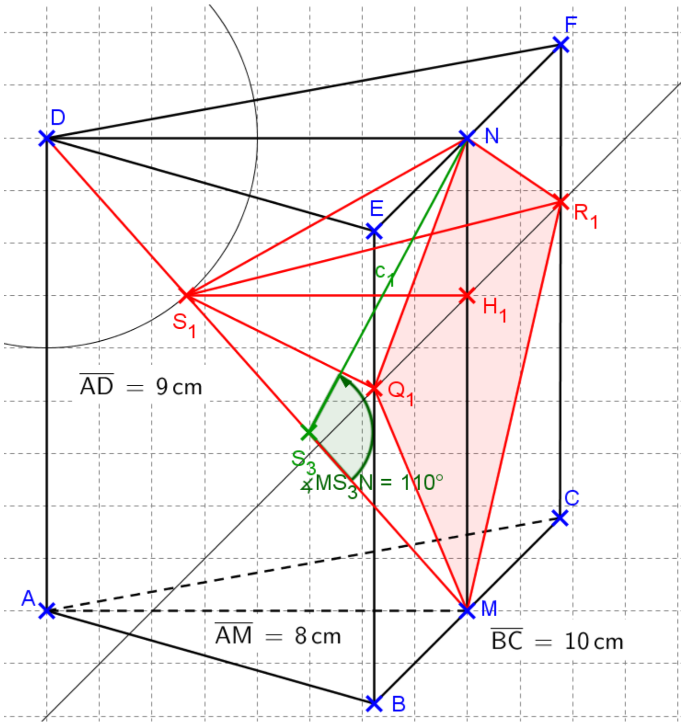
Damit ist $A_3(0 \mid -5)$ und $A_4(2 \mid -6)$ (sehe grad: gar nicht verlangt, aber sonst oft Standard :-))

B 1.7

Da die Steigung der Geraden immer gleich ist, muss auch der an der Geraden anliegende Winkel immer gleich sein. Die Geraden B_nD_n sind zudem immer parallel zur x-Achse.

Aufgabe B2

B 2.1



Dreieck ABM:

$$\tan \sphericalangle BAM = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} = \frac{5\ \text{cm}}{8\ \text{cm}} = 0{,}625 \Rightarrow \sphericalangle BAM = 32{,}01°$$

Damit ist $\sphericalangle BAC = 32{,}01°^{*} \cdot 2 = 64{,}01°$ * ungerundet im TR lassen

B 2.2

Pythagoras im Dreieck AMD:

$$\overline{MD}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AD}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MD}^2 = (8\ \text{cm})^2 + (9\ \text{cm})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MD}^2 = 145\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MD} = 12{,}04\ \text{cm}$$

Dreieck MND:

$$\tan \sphericalangle NMD = \frac{\overline{DN}}{\overline{MS}} = \frac{8\ \text{cm}}{9\ \text{cm}} = 0{,}89 \Rightarrow \sphericalangle NMD = 41{,}63°$$

B 2.3

Vierstreckensatz im Dreieck MND:

$$\frac{\overline{S_1H_1}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{MS_1}}{\overline{MD}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{S_1H_1} = \frac{\overline{ND} \cdot \overline{MS_1}}{\overline{MD}} = \frac{8\ \text{cm} \cdot (12{,}04\ \text{cm} - 4\ \text{cm})}{12{,}04\ \text{cm}} = 5{,}34\ \text{cm}$$

B 2.4
Das Drachenviereck als Grundfläche hat immer den gleichen Flächeninhalt. Problem(chen) ist also die Höhe der Pyramide:

Vierstreckensatz im Dreieck MND, diesmal allgemein:

$$\frac{\overline{S_nH_n}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{MS_n}}{\overline{MD}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{S_nH_n} = \frac{\overline{ND} \cdot \overline{MS_n}}{\overline{MD}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{S_nH_n} = \frac{8\ cm \cdot (12{,}04\ cm - x\ cm)}{12{,}04\ cm}$$

$$\Leftrightarrow \overline{S_nH_n} = (8 - 0{,}66x)\ cm$$

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{MN} \cdot \overline{Q_nR_n} \cdot \overline{S_nH_n}$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9\ cm \cdot 10\ cm \cdot (8 - 0{,}66x)\ cm$$

$$\Leftrightarrow V(x) = 15 \cdot (8 - 0{,}66x)\ cm^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = (-9{,}9x + 120)\ cm^3$$

B 2.5

$$V_{Prisma} = A_G \cdot h$$

$$\Leftrightarrow V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AD}$$

$$\Leftrightarrow V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot 10\ cm \cdot 8\ cm \cdot 9\ cm = 360\ cm^3$$

$$360\ cm^3 \cdot 0{,}25 = 90\ cm^3$$

$$90\ cm^3 = (-9{,}9x + 120)\ cm^3$$

$$\Leftrightarrow 9{,}9x = 30$$

$$\Leftrightarrow x = 3{,}03 \qquad \mathbb{L} = \{3{,}03\}$$

B 2.6

$\sphericalangle NMD = 41{,}63°$

Dreieck MNS_3:

$\sphericalangle S_3NM = 180° - 110° - 41{,}63° = 28{,}37°$

Sinus-Satz im gleichen Dreieck:

$$\frac{\overline{MS_3}}{\sin \sphericalangle S_3NM} = \frac{\overline{MN}}{\sin \sphericalangle MS_3N}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{MS_3} = \frac{\overline{MN} \cdot \sin \sphericalangle S_3NM}{\sin \sphericalangle MS_3N} = \frac{9 \text{ cm} \cdot \sin 28{,}37°}{\sin 110°} = 4{,}55 \text{ cm}$$

$x = 12{,}04 \text{ cm} - \overline{MS_3} = 12{,}04 \text{ cm} - 4{,}55 \text{ cm} = 7{,}49 \text{ cm}$