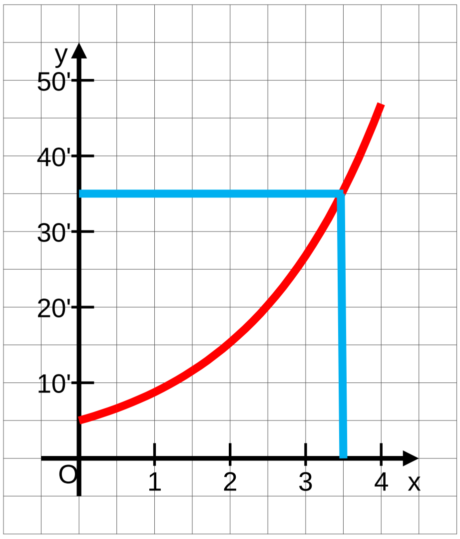
Abschlussprüfung 2018
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Haupttermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 18.05.2021

Aufgabe A1

A 1.1

x	0	1	2	3	4
y	5000	9000	15000	27000	47000



A 1.2

Ausgangswert: 5000

600 % von 5000 sind 30000

30000 + 5000 = 35000

Nach 3,5 Jahren.

Zweig I:

$$35000 = 5000 \cdot 1{,}75^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{35000}{5000} = 1{,}75^x$$

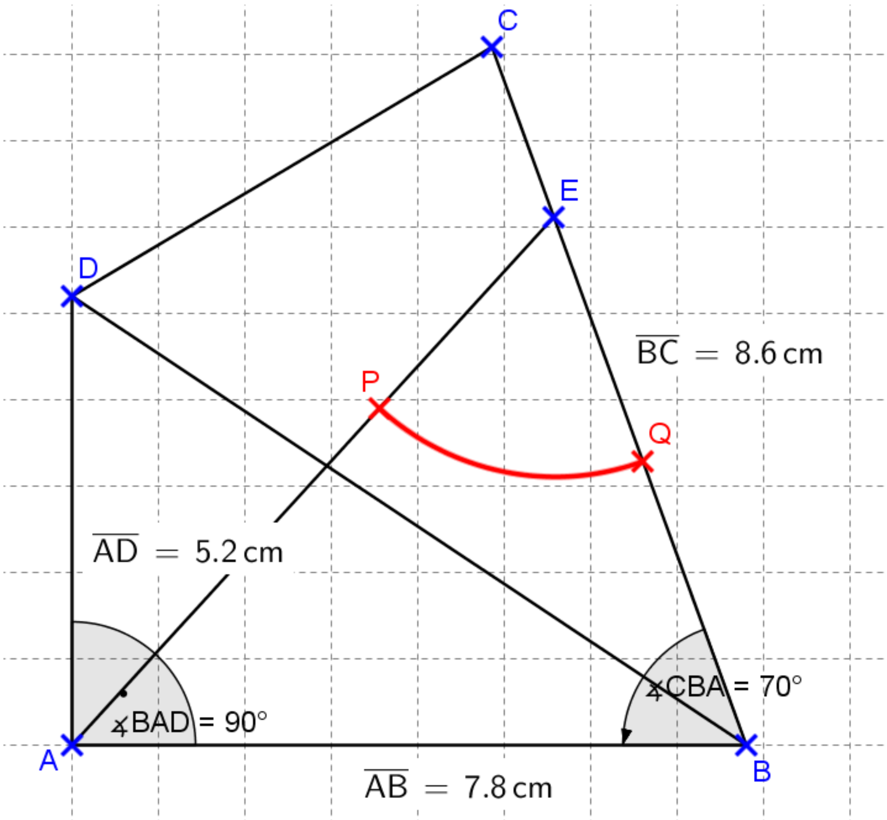
$$\Leftrightarrow x = \log_{1{,}75} 7 = 3{,}48 \quad \mathbb{L} = \{3{,}48\}$$

A 1.3

$y = 5000 \cdot 1{,}\mathbf{75}^x$

Also um 75 %.

Aufgabe A2



A 2.1

Pythagoras im Dreieck ABD:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = (7{,}8\ \text{cm})^2 + (5{,}2\ \text{cm})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 87{,}88\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 9{,}4\ \text{cm}$$

$$A_{BCD} = 0{,}5 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \sphericalangle CBD$$

Fehlt also nur der Winkel ∢CBD. Vorgehen: Berechnung vom Winkel ∢DBA und diesen dann vom Winkel ∢CBA = 70° abziehen.

Dreieck ABD:

$$\tan \sphericalangle DBA = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{5{,}2\ \text{cm}}{7{,}8\ \text{cm}} = 0{,}67 \Rightarrow \sphericalangle DBA = 33{,}7°$$

Damit ist ∢CBD = 70° - 33,7° = 36,3°

$$A_{BCD} = 0{,}5 \cdot 9{,}4\ \text{cm} \cdot 8{,}6\ \text{cm} \cdot \sin 36{,}3° = 23{,}9\ \text{cm}^2$$

A 2.2

$A_{BCD} = A_{ABE} = 23{,}9\ cm^2$

Wieder die Sinus-Formel für den Flächeninhalt, und diesmal dann nach der gesuchten Strecke auflösen.

$$A_{ABE} = 0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BE} \cdot \sin \sphericalangle CBA$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{A_{ABE}}{0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot \sin \sphericalangle CBA}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{23{,}9\ cm^2}{0{,}5 \cdot 7{,}8\ cm \cdot \sin 70°} = 6{,}5\ cm$$

Und nun noch eine Runde Kosinus-Satz im Dreieck ABE:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BE} \cdot \cos \sphericalangle CBA$$

$$\Leftrightarrow \overline{AE}^2 = (7{,}8\ cm)^2 + (6{,}5\ cm)^2 - 2 \cdot 7{,}8\ cm \cdot 6{,}5\ cm \cdot \cos 70°$$

$$\Leftrightarrow \overline{AE}^2 = 68{,}4\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AE} = 8{,}3\ cm$$

A 2.3

$$A = \overline{EQ}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle AEB}{360°}$$

Gesucht ist also der Winkel. Sinus-Satz im Dreieck ABE:

$$\frac{\sin \sphericalangle AEB}{\overline{AB}} = \frac{\sin \sphericalangle CBA}{\overline{AE}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle AEB = \frac{\sin \sphericalangle CBA \cdot \overline{AB}}{\overline{AE}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle AEB = \frac{\sin 70° \cdot 7{,}8\ cm}{8{,}3\ cm} = 0{,}88$$

$\Rightarrow \sphericalangle AEB = 62°$ ($180° - 62° = 118°$ keine Lösung aus Zeichnung)

$$A = (3\ cm)^2 \cdot \pi \cdot \frac{62°}{360°} = 4{,}9\ cm^2$$

Aufgabe A3

3.1

$\overline{SN} = \overline{MS} - \overline{MN} = 5\text{ cm} - 2\text{ cm} = 3\text{ cm}$

Tangens im Dreieck DSM:

$$\tan \sphericalangle SDM = \frac{\overline{MS}}{\overline{MD}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MD} = \frac{\overline{MS}}{\tan \sphericalangle SDM} = \frac{5\text{ cm}}{\tan 71{,}6°} = 1{,}7\text{ cm}$$

Vierstreckensatz im gleichen Dreieck:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{SN}}{\overline{SM}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AN} = \frac{\overline{SN} \cdot \overline{MD}}{\overline{SM}} = \frac{3\text{ cm} \cdot 1{,}7\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 1{,}0\text{ cm}$$

Variante: Tangens im Dreieck ASN:

$$\tan \sphericalangle SAN = \frac{\overline{SN}}{\overline{AN}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AN} = \frac{\overline{SN}}{\tan \sphericalangle SAN} = \frac{3\text{ cm}}{\tan 71{,}6°} = 1{,}0\text{ cm}$$

3.2

$$V_{Praline} = V_{DSC} - V_{ASB}$$

$$\Leftrightarrow V_{Praline} = \frac{1}{3} \cdot \overline{MD}^2 \cdot \pi \cdot \overline{MS} - \frac{1}{3} \cdot \overline{AN}^2 \cdot \pi \cdot \overline{SN}$$

$$\Leftrightarrow V_{Praline} = \frac{1}{3} \cdot (1{,}7\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 5\text{ cm} - \frac{1}{3} \cdot (1{,}0\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 3\text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow V_{Praline} = 15{,}1\text{ cm}^3 - 3{,}1\text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow V_{Praline} = 12\text{ cm}^3$$

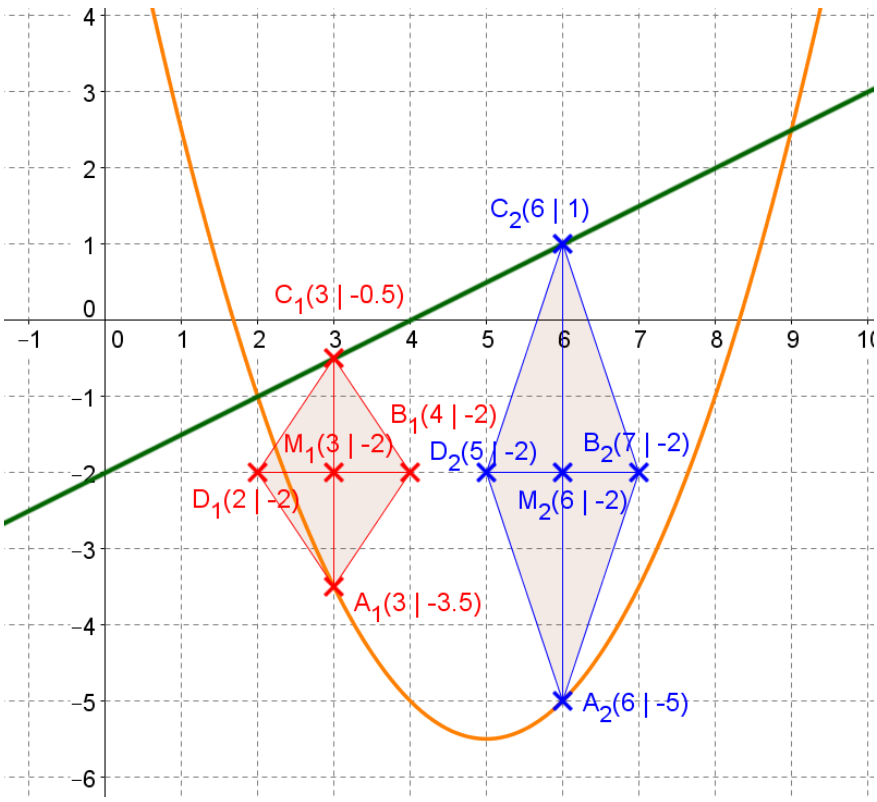
$V_{Praline}$ entspricht 100 %; V_{Schoko} entspricht 89 % und damit bleiben für V_{Creme} noch 100 % - 89 % = 11 % übrig.

$V_{Creme} = 12\text{ cm}^3 \cdot 0{,}11 = 1{,}3\text{ cm}^3$

Aufgabe B1

B 1.1 und 1.2

p: $y = 0{,}5x^2 - 5x + 7$ **g: $y = 0{,}5x - 2$**



P(-2 | 19) Q(4|-5)

I $19 = 0{,}5 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$

II $-5 = 0{,}5 \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$

I $19 = 2 - 2b + c$

$\Leftrightarrow$ $c = 17 + 2b$

II $-5 = 8 + 4b + c$

$\Leftrightarrow$ $c = -13 - 4b$

I = II $17 + 2b = -13 - 4b$

$\Leftrightarrow$ $6b = -30$

$\Leftrightarrow$ $b = -5$

b in I $c = 17 + 2 \cdot (-5) = 7$ Damit ist **p: $y = 0{,}5x^2 - 5x + 7$**

B 1.3

Rauten existieren (Umlaufsinn!) nur zwischen den Schnittpunkten von g und p. Also:

$0{,}5x^2 - 5x + 7 = 0{,}5x - 2$

$\Leftrightarrow$ $0{,}5x^2 - 5{,}5x + 9 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{5{,}5 \pm \sqrt{(-5{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 9}}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{5{,}5 \pm \sqrt{12{,}25}}{1}$$

$\Rightarrow$ $x_1 = 9$ und $x_2 = 2$ $\mathbb{L} = \{2;\ 9\}$

Damit gilt: $2 < x < 9$

B 1.4

$$\overline{A_nC_n}(x) = \sqrt{(x - x)^2 + (0{,}5x - 2 - (0{,}5x^2 - 5x + 7))^2}\ LE$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_nC_n}(x) = \sqrt{(-0{,}5x^2 + 5{,}5x - 9)^2}\ LE$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_nC_n}(x) = (-0{,}5x^2 + 5{,}5x - 9)\ LE$$

$$\overline{A_2C_2} = (-0{,}5 \cdot 6^2 + 5{,}5 \cdot 6 - 9)\ LE = 6\ LE$$

$$\overline{M_2C_2} = 0{,}5 \cdot \overline{A_2C_2} = 0{,}5 \cdot 6\ LE = 3\ LE$$

Tangens im Dreieck $D_2M_2C_2$:

$$\tan \sphericalangle D_2C_2M_2 = \frac{\overline{M_2D_2}}{\overline{M_2C_2}} = \frac{1\ LE}{3\ LE} = 0{,}33 \Rightarrow \sphericalangle D_2C_2M_2 = 18{,}43°$$

$\sphericalangle D_2C_2B_2 = \sphericalangle D_2C_2M_2 \cdot 2 = 18{,}43°$* $\cdot 2 = 36{,}87°$
* ungerundet im Taschenrechner lassen

Pythagoras im Dreieck $A_2B_2M_2$:

$$\overline{A_2B_2}^2 = \overline{A_2M_2}^2 + \overline{B_2M_2}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_2B_2}^2 = (3\ LE)^2 + (1\ LE)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_2B_2}^2 = 10\ FE$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_2B_2} = 3{,}16\ LE$$

B 1.5

x-Wert: Da $\overline{B_nD_n} = 2$ LE gilt für den x-Wert von B_n, dass er um 1 größer sein muss als der x-Wert von M_n.
y-Wert: Gleicher y-Wert wie M_n. Nun graben wir aus der 7. Klasse die Formel für den Mittelpunkt einer Strecke raus:

$$M_n\left(\frac{x + x}{2} \mid \frac{0{,}5x - 2 + 0{,}5x^2 - 5x + 7}{2}\right)$$

also $M_n\left(\frac{2x}{2} \mid \frac{0{,}5x^2 - 4{,}5x + 5}{2}\right)$

also $M_n(x \mid 0{,}25x^2 - 2{,}25x + 2{,}5)$

Somit haben wir $B_n(x + 1 \mid 0{,}25x^2 - 2{,}25x + 2{,}5)$

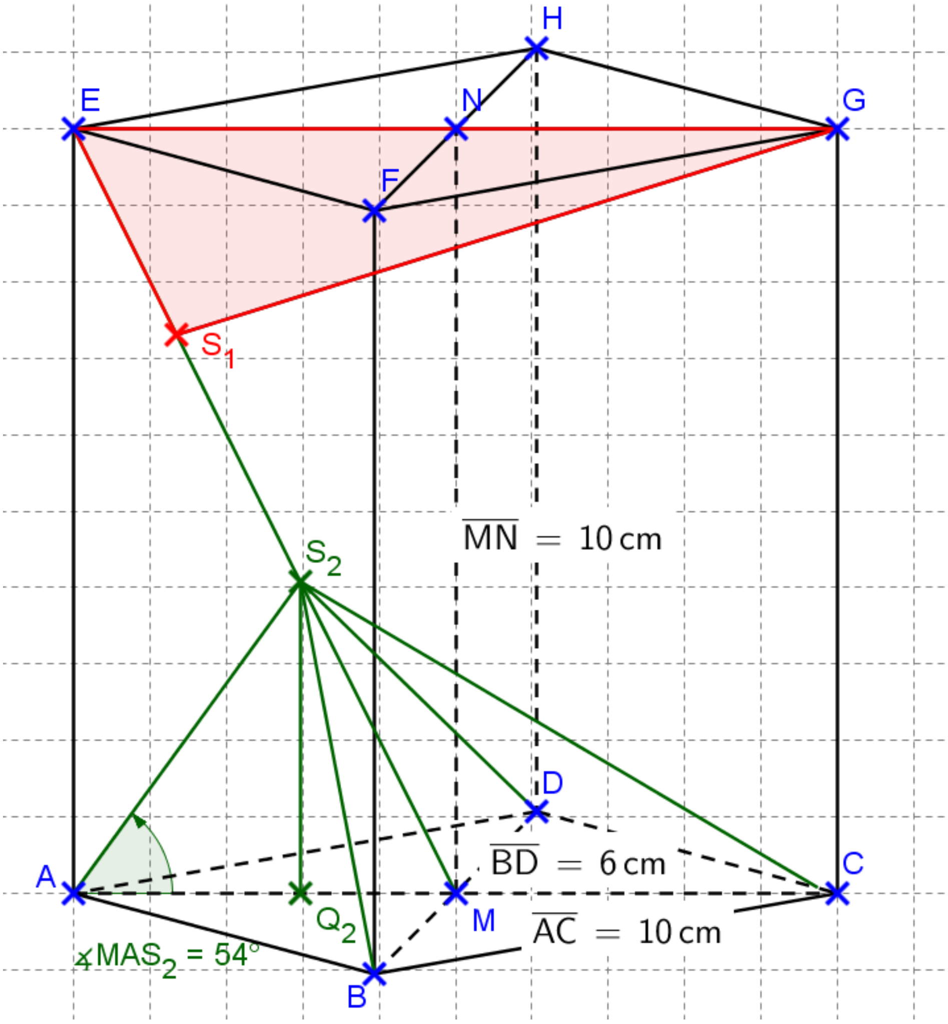
B 1.6

$\overline{B_nD_n} = 2 \Rightarrow$ Somit entsteht der größte Flächeninhalt für die längste andere Diagonale. Ist dieser kleiner als 7 FE haben wir gewonnen!

$$T_{max} = -0{,}5x^2 + 5{,}5x - 9$$
$$\Leftrightarrow T_{max} = -0{,}5(x^2 - 11x) - 9$$
$$\Leftrightarrow T_{max} = -0{,}5(x^2 - 11x + 5{,}5^2 - 5{,}5^2) - 9$$
$$\Leftrightarrow T_{max} = -0{,}5[(x - 5{,}5)^2 - 5{,}5^2)] - 9$$
$$\Leftrightarrow T_{max} = -0{,}5(x - 5{,}5)^2 + 6{,}125$$

Die längste Diagonale hat also eine Länge von 6,125 LE.
Also: $A_{max} = 0{,}5 \cdot 2\ LE \cdot 6{,}125\ LE = 6{,}125\ FE < 7\ FE$

Aufgabe B2
B 2.1 und 2.2



Pythagoras im Dreieck AME:

$$\overline{ME}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AE}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{ME}^2 = (5\ \text{cm})^2 + (10\ \text{cm})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{ME}^2 = 125\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{ME} = 11{,}18\ \text{cm}$$

Das Winkelspiel kennen wir schon aus A 2.1. Berechnung vom Winkel ∢AEM als Vorstufe:

$$\tan \sphericalangle AEM = \frac{\overline{AM}}{\overline{AE}} = \frac{5\ \text{cm}}{10\ \text{cm}} = 0{,}50 \Rightarrow \sphericalangle AEM = 26{,}57°$$

Damit ist $\sphericalangle MEN = 90° - 26{,}57° = 63{,}43°$

Weiter geht's wie in A 2.1:

$A_{S1GE} = 0,5 \cdot \overline{ES_1} \cdot \overline{EG} \cdot \sin \sphericalangle MEN$

$\Leftrightarrow A_{S1GE} = 0,5 \cdot 3\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} \cdot \sin 63,43° = 13,42\text{ cm}^2$

Nun analog zu A 2.2 noch eine Runde Kosinus-Satz im Dreieck ES_1G:

$\overline{S_1G}^2 = \overline{ES_1}^2 + \overline{EG}^2 - 2 \cdot \overline{ES_1} \cdot \overline{EG} \cdot \cos \sphericalangle CBA$

$\Leftrightarrow \overline{S_1G}^2 = (3\text{ cm})^2 + (10\text{ cm})^2 - 2 \cdot 3\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} \cdot \cos 63,43°$

$\Leftrightarrow \overline{S_1G}^2 = 82,16\text{ cm}^2$

$\Leftrightarrow \overline{S_1G} = 9,06\text{ cm}$

B 2.3

Dreieck AME:

$\sphericalangle EMA = 180° - 90° - 26,57° = 63,43°$

Dreieck MS_nQ_n:

$$\sin \sphericalangle EMA = \frac{\overline{Q_nS_n}}{\overline{MS_n}}$$

$\Leftrightarrow \overline{Q_nS_n} = \sin \sphericalangle EMA \cdot \overline{MS_n}$

$\Leftrightarrow \overline{Q_nS_n} = \sin 63,43° \cdot (11,18 - x)\text{ cm}$

$\Leftrightarrow \overline{Q_nS_n} = (10 - 0,89x)\text{ cm}$

Damit ist

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{Q_nS_n}$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} \cdot (10 - 0,89x)\text{ cm}$$

$\Leftrightarrow V(x) = (100 - 8,9x)\text{ cm}^3$

B 2.4

Gesucht ist zuerst der Wert von x ($\overline{ES_2} = x$). Das x selber findet man im Dreieck AS_2E, so dass es sich lohnt, in diesem Dreieck zu rechnen. Zuerst ein paar Winkel (aus 2.1 und 2.3):

$\sphericalangle S_2AE = 90° - 54° = 36°$

$\sphericalangle ES_2A = 180° - 36° - 26,57° = 117,43°$

Sinus-Satz:

$$\frac{\overline{ES_2}}{\sin \sphericalangle S_2AE} = \frac{\overline{AE}}{\sin \sphericalangle ES_2A}$$

$$\Leftrightarrow \overline{ES_2} = \frac{\overline{AE} \cdot \sin \sphericalangle S_2AE}{\sin \sphericalangle ES_2A} = \frac{10\text{ cm} \cdot \sin 36°}{\sin 117,43°} = 6,62\text{ cm}$$

Also: $V_2 = (100 - 8,9 \cdot 6,62)\text{ cm}^3 = 41,08\text{ cm}^3$

Ganz anderer Ansatz:
Wir ignorieren x und interessieren uns nur für die Höhe $[Q_2S_2]$.
Auf die kommen wir, wenn wir im Dreieck AQ_2S_2 mit dem Winkel
$\sphericalangle MAS_2 = 54°$ und der Länge der Strecke $[AS_2]$ arbeiten.

Sinus-Satz im Dreieck AS_2E:

$$\frac{\overline{AS_2}}{\sin \sphericalangle AES_2} = \frac{\overline{AE}}{\sin \sphericalangle ES_2A}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AS_2} = \frac{\overline{AE} \cdot \sin \sphericalangle AES_2}{\sin \sphericalangle ES_2A} = \frac{10 \text{ cm} \cdot \sin 26{,}57°}{\sin 117{,}43°} = 5{,}04 \text{ cm}$$

Dreieck AQ_2S_2:

$$\sin \sphericalangle MAS_2 = \frac{\overline{Q_2S_2}}{\overline{AS_2}}$$

$$\overline{Q_2S_2} = \sin \sphericalangle MAS_2 \cdot \overline{AS_2} = \sin 54° \cdot 5{,}04 \text{ cm} = 4{,}08 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{Q_2S_2}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 4{,}08 \text{ cm} = 40{,}80 \text{ cm}^3$$

Für ganze fleißige: Es gibt noch mehr Varianten!
B 2.5
Finale!

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{MN}$$

$$\Leftrightarrow V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 300 \text{ cm}^3$$

Damit sprechen wir von $300 \text{ cm}^3 : 2 = 150 \text{ cm}^3$.

$V(x) = (100 - 8{,}9x) \text{ cm}^3$
$\Leftrightarrow 150 \text{ cm}^3 = (100 - 8{,}9x) \text{ cm}^3$
$\Leftrightarrow 50 = -8{,}9x$
$\Leftrightarrow x = -5{,}62$

Da $0 \leqq x < 11{,}18$ (siehe Angabe 2.2), ist der oben berechnete Wert von x nicht möglich $\Rightarrow$ Keine Pyramide mit dem gesuchten Volumen möglich!

Andere Variante:
$V(x) = (100 - 8{,}9x) \text{ cm}^3$

Das maximale Volumen wird für $x = 0$ erreicht und beträgt 100 cm^3. Das ist eindeutig nicht 150 cm^3.