Abschlussprüfung 2012
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Haupttermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 15.06.2018

Aufgabe A1

Berechnung der fehlenden Strecken:

$\overline{AD} = \frac{5}{6}\overline{AB} = \frac{5}{6} \cdot 60\text{ m} = 50\text{ m}$

$\overline{AE} = \frac{5}{6}\overline{AC} = \frac{5}{6} \cdot 51\text{ m} = 42{,}5\text{ m}$

Berechnung von $\sphericalangle BAC$ mit dem Kosinussatz:

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \sphericalangle BAC$

$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle BAC = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{-2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{45^2 - 60^2 - 51^2}{-2 \cdot 60 \cdot 51} = 0{,}68$

$\Leftrightarrow \sphericalangle BAC = 46{,}97°$

Berechnung des Flächeninhalts vom Trapez DBCE:

$A_{ABC} = 0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \sphericalangle BAC$

$\Leftrightarrow A_{ABC} = (0{,}5 \cdot 60 \cdot 51 \cdot \sin 46{,}97°)\text{cm}^2 = 1118{,}42\text{ cm}^2$

$A_{ADE} = 0{,}5 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \sin \sphericalangle BAC$

$\Leftrightarrow A_{ADE} = (0{,}5 \cdot 50 \cdot 42{,}5 \cdot \sin 46{,}97°)\text{cm}^2 = 776{,}68\text{ cm}^2$

$A_{DBCE} = A_{ABC} - A_{ADE} = 1118{,}42\text{ cm}^2 - 776{,}68\text{ cm}^2 = 341{,}74\text{ cm}^2$

Berechnung des Prozentsatzes:

$p = \frac{PW \cdot 100\ \%}{GW} = \frac{341{,}74\text{ cm}^2 \cdot 100\ \%}{1118{,}42\text{ cm}^2} \approx 30{,}56\ \%$

Aufgabe A2

2.1 Berechnung des Winkels $\sphericalangle CAS = \alpha$ im Dreieck AMS:

$\tan \alpha = \frac{\overline{MS}}{\overline{AM}} = \frac{10\text{ cm}}{6\text{ cm}} \approx 1{,}67 \Leftrightarrow \alpha = 59{,}04°$

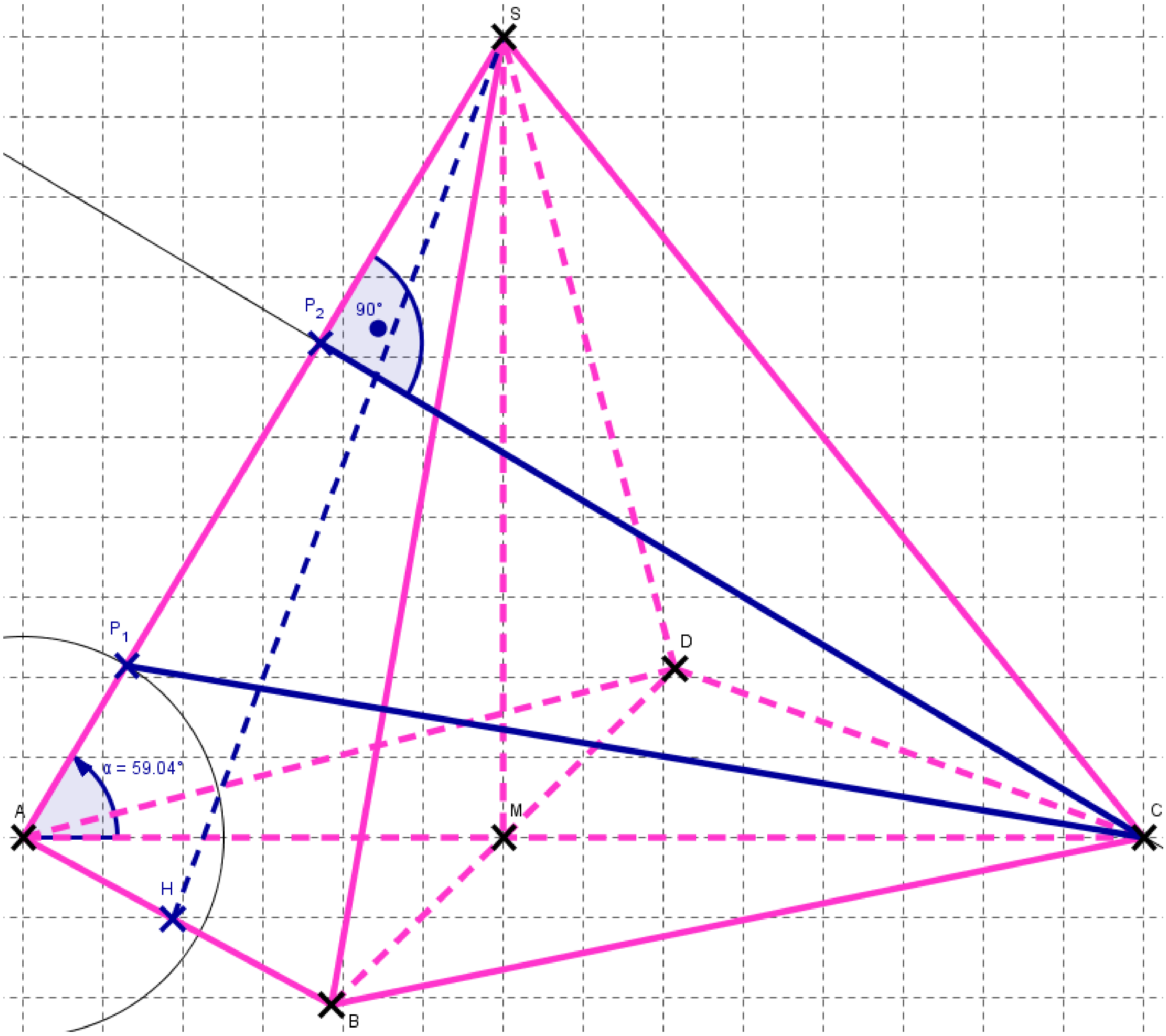
Berechnung von $\overline{CS}$ mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck AMS:

$\overline{AS}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MS}^2 =$

$\Leftrightarrow \overline{AS}^2 = (6^2 + 10^2)\text{ cm}^2 = 136\text{ cm}^2$

$\Leftrightarrow \overline{AS} = 11{,}66\text{ cm}$

2.2



Berechnung von $\overline{P_1C}$ mit dem Kosinussatz im Dreieck ACP_1:

$$\overline{P_1C}^2 = \overline{AP_1}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AP_1} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_1C}^2 = (2{,}5^2 + 14^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot 14 \cdot \cos 59{,}04°)\ \text{cm}^2 = 166{,}24\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_1C} = 12{,}89\ \text{cm}$$

Berechnung von $\sphericalangle P_1CA$ mit dem Sinussatz im Dreieck ACP_1:

$$\frac{\overline{P_1C}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AP_1}}{\sin \sphericalangle P_1CA} \Leftrightarrow \sin \sphericalangle P_1CA = \frac{\overline{AP_1} \cdot \sin\alpha}{\overline{P_1C}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle P_1CA = \frac{2{,}5\ \text{cm} \cdot \sin 59{,}04°}{12{,}89\ \text{cm}} = 0{,}17$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle P_1CA = 9{,}57°$ (170,43° nicht möglich wegen Innenwinkelsumme im Dreieck, es ist bereits $\alpha = 59{,}04°$ vorhanden)

2.3

Wenn $\overline{P_2C}$ die minimale Länge haben soll, dann bedeutet das, dass der Punkt P_2 auf dem Lot (= Abstand) durch C liegt. Das Lot steht senkrecht auf [AS], so dass $\sphericalangle CP_1S = \sphericalangle AP_2C = 90°$ hat.

Berechnung von $\overline{AP_2}$ im rechtwinkligen Dreieck ACP_2:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AP_2}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AP_2} = \cos\alpha \cdot \overline{AC} = \cos 59{,}04° \cdot 14\ \text{cm} = 7{,}2\ \text{cm}$$

2.4 Berechnung von $\overline{AB}$ im Dreieck ABM:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = [6^2 + (12 : 2)^2]\ \text{cm}^2 = 72\ \text{cm}^2$$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 8{,}49$ cm

Berechnung der Höhe des Dreiecks ABS im Dreieck AHS:

$\overline{AH} = 0{,}5 \cdot \overline{AB} = 0{,}5 \cdot 8{,}49\ \text{cm} = 4{,}25\ \text{cm}$

$$\overline{HS}^2 = \overline{AS}^2 - \overline{AH}^2 = (11{,}66^2 - 4{,}25^2)\ \text{cm}^2 = 117{,}89\ \text{cm}^2$$

$\Leftrightarrow \overline{HS} = 10{,}86$ cm

Berechnung des Flächeninhalts:

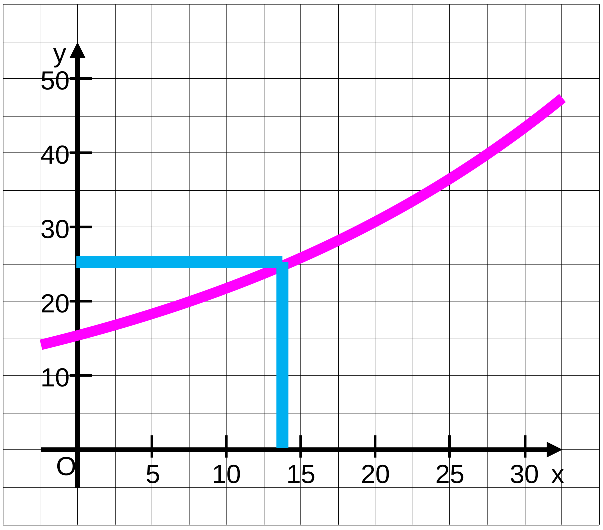
$A = 0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{HS} = 0{,}5 \cdot 8{,}49\ \text{cm} \cdot 10{,}86\ \text{cm} = 46{,}1\ \text{cm}^2$

Aufgabe A3

3.1 $y = 15{,}5 \cdot 1{,}035^x$ Prozentsatz: $0{,}035 = 3{,}5\ \%$

3.2

x	0	5	10	15	20	25	30
$15{,}5 \cdot 1{,}035^x$	15,5	18,4	21,9	26,0	30,8	36,6	43,5



3.3

Blaue Linie: Nach 14 Jahren (im Rahmen der Ablesegenauigkeit).

Zweig I

$25 = 15{,}5 \cdot 1{,}035^x$

$\frac{25}{15{,}5} = 1{,}035^x$

$x = \log_{1{,}035}\frac{25}{15{,}5} = 13{,}9$ $\mathbb{L} = \{13{,}9\}$

3.4

$x = 2064 - 2010 = 54$

$y = 15{,}5 \cdot 1{,}035^{54} \approx 99$

Niger wird zu Beginn des Jahres 2064 99 Millionen Einwohner haben.

Aufgabe B1:

1.1

Bestimmung der Parabelgleichung mit P(-5 | -19)und Q(7 | 5):

$p: y = -0{,}25x^2 + bx + c$

I $-19 = -0{,}25 \cdot (-5)^2 + (-5)b + c$

$\Leftrightarrow c = -12{,}75 + 5b$

II $5 = -0{,}25 \cdot 7^2 + 7b + c$

$\Leftrightarrow c = 17{,}25 - 7b$

I = II

$-12{,}75 + 5b = 17{,}25 - 7b \quad |+7b + 12{,}75$

$\Leftrightarrow 12b = 30$

$\Leftrightarrow b = 2{,}5$ und in I $c = -12{,}75 + 5 \cdot 2{,}5 = -0{,}25$

Also: **$p: y = -0{,}25x^2 + 2{,}5x - 0{,}25$**

Bestimmung der Geradengleichung mit R(0 | 2,5) und S(5 |0):

$g: y = mx + t$

I $2{,}5 = m \cdot 0 + t$

$\Leftrightarrow t = 2{,}5$

I in II $0 = m \cdot 5 + 2{,}5 \quad |-2{,}5$

$\Leftrightarrow 5m = -2{,}5 \quad |: 5$

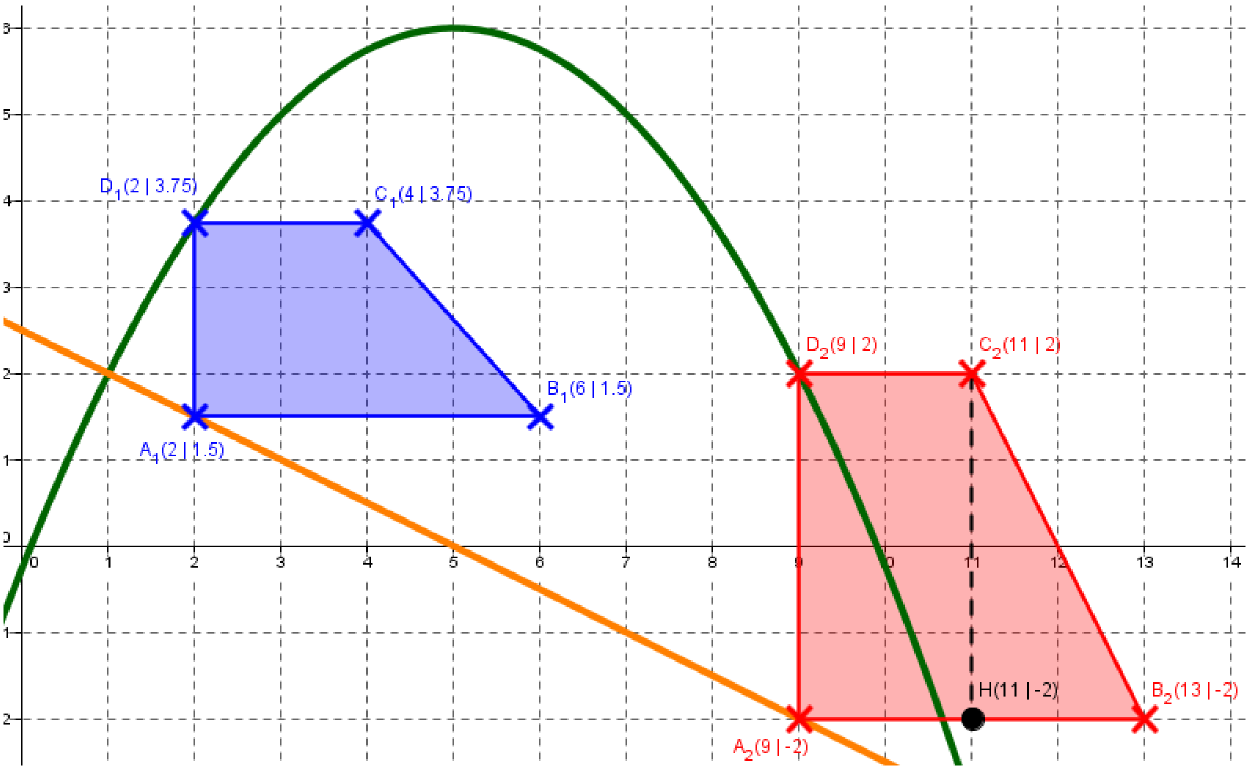
$\Leftrightarrow m = -0{,}5$

Also: **$g: y = -0{,}5x + 2{,}5$**

1.2

Viereck1: $A_1(2|1{,}5)$ $B_1(6|1{,}5)$ $C_1(4|3{,}75)$ $D_1(2|3{,}75)$

Viereck2: $A_2(9|-2)$ $B_2(13|-2)$ $C_2(11|2)$ $D_2(9|2)$



1.3

$A_{Trapez} = 0{,}5 \cdot h \cdot (a + c)$

$$\overline{A_nD_n} = \sqrt{(D_x - A_x)^2 + (D_y - A_y)^2}$$
$$\Leftrightarrow \overline{A_nD_n} = \sqrt{(x - x)^2 + (\mathbf{-0{,}25x^2 + 2{,}5x - 0{,}25} - (\mathbf{-0{,}5x + 2{,}5}))^2}$$
$$\Leftrightarrow \overline{A_nD_n} = \sqrt{(-0{,}25x^2 + 2{,}5x - 0{,}25 + 0{,}5x - 2{,}5)^2}$$
$$\Leftrightarrow \overline{A_nD_n} = (-0{,}25x^2 + 3x - 2{,}75)\ [LE]$$

Also: $A_{Trapez} = 0{,}5 \cdot \overline{A_nD_n} \cdot (\overline{A_nB_n} + \overline{D_nC_n})$

$$\Leftrightarrow A_{Trapez} = [0{,}5 \cdot (-0{,}25x^2 + 3x - 2{,}75) \cdot (4 + 2)]\ FE$$
$$\Leftrightarrow A_{Trapez} = [3 \cdot (-0{,}25x^2 + 3x - 2{,}75)]\ FE$$
$$\Leftrightarrow A_{Trapez} = (-0{,}75x^2 + 9x - 8{,}25)\ FE$$

1.4

Es existieren nur Trapeze in dem Bereich zwischen den Schnittpunkten von **p** und **g** – also gleichsetzen und Lösungsformel:

$$\mathbf{-0{,}25x^2 + 2{,}5x - 0{,}25} = \mathbf{-0{,}5x + 2{,}5}$$
$$\Leftrightarrow -0{,}25x^2 + 3x - 2{,}75 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-0{,}25) \cdot (-2{,}75)}}{2 \cdot (-0{,}25)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{6{,}25}}{-0{,}5} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 11 \quad \mathbb{L} = \{1;\ 11\}$$

Aufgabenstellung beachten und lösen:

Es existieren Trapeze für $1 < x < 11$ (oder $x \in]1;\ 11[$)

1.5

$$A(x) = -0{,}75x^2 + 9x - 8{,}25$$
$$\Leftrightarrow A(x) = -0{,}75(x^2 - 12x) - 8{,}25$$
$$\Leftrightarrow A(x) = -0{,}75(x^2 - 12x + 6^2 - 6^2) - 8{,}25$$
$$\Leftrightarrow A(x) = -0{,}75[(x - 6)^2 - 36] - 8{,}25$$
$$\Leftrightarrow A(x) = -0{,}75(x - 6)^2 + 18{,}75$$

Der maximale Flächeninhalt ist 18,75 FE für $x = 6$.

1.6
Berechnung des Winkels $\sphericalangle C_2B_2A_2$ im Dreieck HC_2B_2:
$\overline{HC_n} = \overline{A_nD_n}$

$$\overline{A_2D_2}^2 = \sqrt{(D_x - A_x)^2 + (D_y - A_y)^2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_2D_2}^2 = \sqrt{(9 - 9)^2 + (2 - (-2))^2} = 16$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_2D_2} = 4 \text{ (LE)}$$

$$\overline{HB_n} = 0{,}5 \cdot \overline{A_nB_n} = (0{,}5 \cdot 4) = 2 \text{ (LE)}$$

$$\tan \sphericalangle C_2B_2A_2 = \frac{\overline{HC_2}}{\overline{HB_n}} = \frac{4 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 2 \quad \Leftrightarrow \sphericalangle C_2B_2A_2 = 63{,}43°$$

Die Winkel $\sphericalangle C_nB_nA_n$ werden umso größer, desto länger die Seite $[A_nD_n]$ ist. Da in allen Trapezen $\overline{A_nB_n} = \overline{D_nC_n}$ gilt, ist für den maximalen x-Wert aus 1.5 (x = 6) die Streckenlänge $\overline{A_nD_n}$ maximal.

Berechnung dieser maximalen Streckenlänge:

$$\overline{A_nD_n}_{\ (max)} = (-0{,}25x^2 + 3x - 2{,}75) \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_nD_n}_{\ (max)} = (-0{,}25 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 - 2{,}75) \text{ cm} = 6{,}25 \text{ cm}$$

Analog zum ersten Teil berechnet man nun erneut den Winkel über den Tangens:

$$\tan \sphericalangle C_{max}B_{max}A_{max} = \frac{\overline{A_nD_n}_{\ (max)}}{\overline{HB_n}} = \frac{6{,}25 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 3{,}125$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle C_{max}B_{max}A_{max} = 72{,}26° < 75°$$

Aufgabe B2:

2.1 Berechnung von β über den Kreisbogen b:

$$b = 2 \cdot \frac{\beta}{360°} \cdot r \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{b \cdot 360°}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{201{,}6\ cm \cdot 360°}{2 \cdot 110\ cm \cdot \pi} = 105°$$

Da alle Sektoren gleich groß sind, gilt für jeden Winkel der drei Sektoren: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 105° : 3 = 35°$

2.2

Berechnung von $\overline{AC}$ mit dem Kosinussatz im Dreieck ABC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (110^2 + 110^2 - 2 \cdot 110 \cdot 110 \cdot \cos 105°)\ cm^2 = 30463{,}4\ cm^2$$

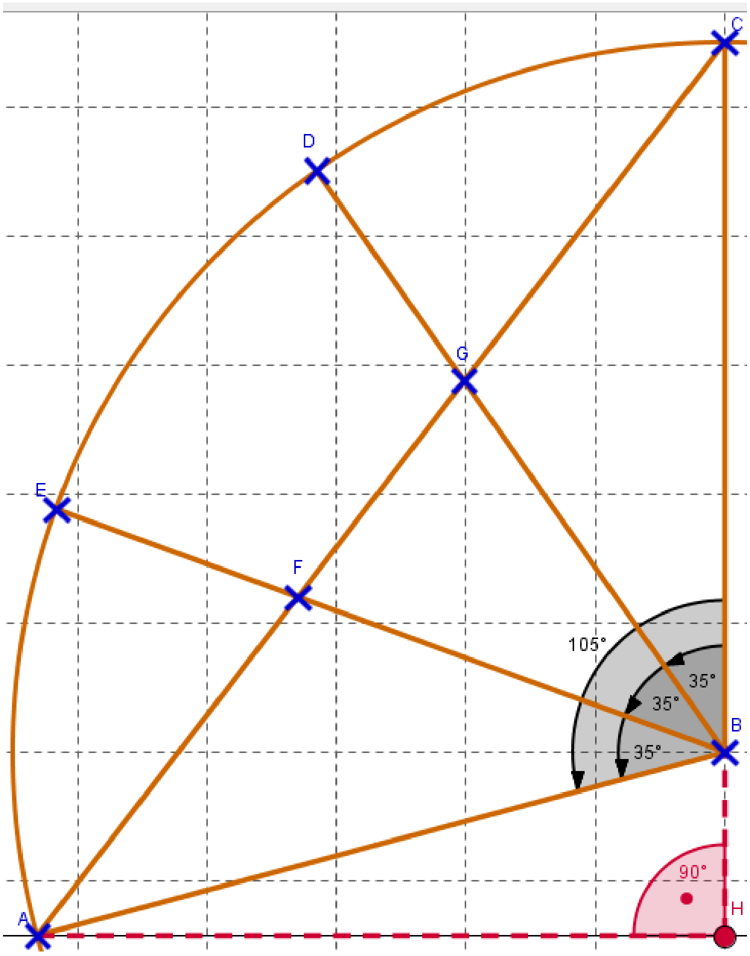
$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 174{,}5\ cm$$

$l = 0{,}95 \cdot \overline{AC} = 0{,}95 \cdot 174{,}5\ cm = 165{,}8\ cm$

[genau lesen, oft wird hier 8,7 cm (also 5 % statt 95 %) als falsche Lösung angegeben]

2.3

Hilfsdreieck einzeichnen.



Berechnung von $\overline{AH}$ im Dreieck AHB:

$\sphericalangle BHA = 180° - \beta = 180° - 105° = 75°$

$\sin \sphericalangle BHA = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AH} = \sin \sphericalangle BHA \cdot \overline{AB} = \sin 75° \cdot 110 \text{ cm} = 106{,}3 \text{ cm}$

2.4 Berechnung von $\overline{GB}$ mit dem Sinussatz im Dreieck BCG:

$\sphericalangle CBG = 35°$ nach 2.2

Dreieck ABC: $\sphericalangle ACB = (180° - 105°) : 2 = 37{,}5°$

Dreieck BCG: $\sphericalangle BGC = 180° - 35° - 37{,}5° = 107{,}5°$

$$\frac{\overline{GB}}{\sin \sphericalangle ACB} = \frac{\overline{BC}}{\sin \sphericalangle BGC} \Leftrightarrow \overline{GB} = \frac{\overline{BC} \cdot \sin \sphericalangle ACB}{\sin \sphericalangle BGC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{GB} = \frac{110 \text{ cm} \cdot \sin 37{,}5°}{\sin 107{,}5°} = 70{,}2 \text{ cm}$$

$A_{BGF} = 0{,}5 \cdot \overline{GB} \cdot \overline{FB} \cdot \sin 35°$

$\Leftrightarrow A_{BGF} = 0{,}5 \cdot 70{,}2 \text{ cm} \cdot 70{,}2 \text{ cm} \cdot \sin 35° = 1413{,}3 \text{ cm}^2$

2.5

$A_{SektorBCD} = \frac{35°}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{35°}{360°} \cdot \overline{BC}^2 \cdot \pi$

$\Leftrightarrow A_{SektorBCD} = (\frac{35°}{360°} \cdot 110^2 \cdot \pi) \text{ cm}^2 = 3695{,}7 \text{ cm}^2$

$A_{BGC} = 0{,}5 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{GB} \cdot \sin 35°$

$\Leftrightarrow A_{BGC} = 0{,}5 \cdot 110 \text{ cm} \cdot 70{,}2 \text{ cm} \cdot \sin 35° = 2214{,}6 \text{ cm}^2$

$A_{CDG} = A_{SektorBCD} - A_{BGC} = 3695{,}7 \text{ cm}^2 - 2214{,}6 \text{ cm}^2 = 1481{,}1 \text{ cm}^2$

2.6

$A_{dunkel} = A_{BGF} + A_{CDG} + A_{AFE}$

$\Leftrightarrow A_{dunkel} = 1413{,}3 \text{ cm}^2 + 1481{,}2 \text{ cm}^2 + 1481{,}2 \text{ cm}^2 = 4375{,}7 \text{ cm}^2$

$A_{alles} = \frac{105°}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{105°}{360°} \cdot \overline{BC}^2 \cdot \pi$

$\Leftrightarrow A_{alles} = (\frac{105°}{360°} \cdot 110^2 \cdot \pi) \text{ cm}^2 = 11087{,}2 \text{ cm}^2$

$A_{hell} = A_{alles} - A_{dunkel}$

$\Leftrightarrow A_{hell} = 11087{,}2 \text{ cm}^2 - 4375{,}7 \text{ cm}^2 = 6711{,}5 \text{ cm}^2$

Fragestellung beachten: Der helle Teil soll mehr als 40 % größer als der dunkle Teil sein, also muss das Verhältnis lauten:

$$\frac{A_{hell}}{A_{dunkel}} = \frac{6711{,}5 \text{ cm}^2}{4375{,}7 \text{ cm}^2} \approx 1{,}53 > 1{,}4$$