

Abschlussprüfung 2011 an den Realschulen in Bayern

Mathematik II Nachtermin Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 09.06.2017

Aufgabe A1:

1.1

Vorgehen: $\text{Volumen Kegel}_{\text{ABS}} - \text{Volumen Kegel}_{\text{DCS}} - \text{Volumen}_{\text{Halbkugel}}$

Volumen ABS:

Berechnung der Höhe des Kegels:

$$\tan \angle \text{BAD} = \frac{h}{\overline{\text{AM}}} \Leftrightarrow h = \overline{\text{AM}} \cdot \tan \angle \text{BAD} = 4,5 \text{ cm} \cdot \tan 52^\circ = 5,8 \text{ cm}$$

$$V_{\text{ABS}} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \overline{\text{AM}}^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{ABS}} = \frac{1}{3} \cdot (4,5 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 5,8 \text{ cm} = \underline{123 \text{ cm}^3}$$

Volumen DCS:

Berechnung der Höhe des kleinen Kegels:

$$\frac{\overline{\text{DC}}}{\overline{\text{AB}}} = \frac{\overline{\text{SE}}}{h} \Leftrightarrow \overline{\text{SE}} = \frac{\overline{\text{DC}} \cdot h}{\overline{\text{AB}}} = \frac{4 \text{ cm} \cdot 5,8 \text{ cm}}{9 \text{ cm}} = 2,6 \text{ cm}$$

$$V_{\text{DCS}} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \overline{\text{DE}}^2 \cdot \pi \cdot \overline{\text{SE}}$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{DCS}} = \frac{1}{3} \cdot (2 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 2,6 \text{ cm} = \underline{10,9 \text{ cm}^3}$$

Volumen Halbkugel:

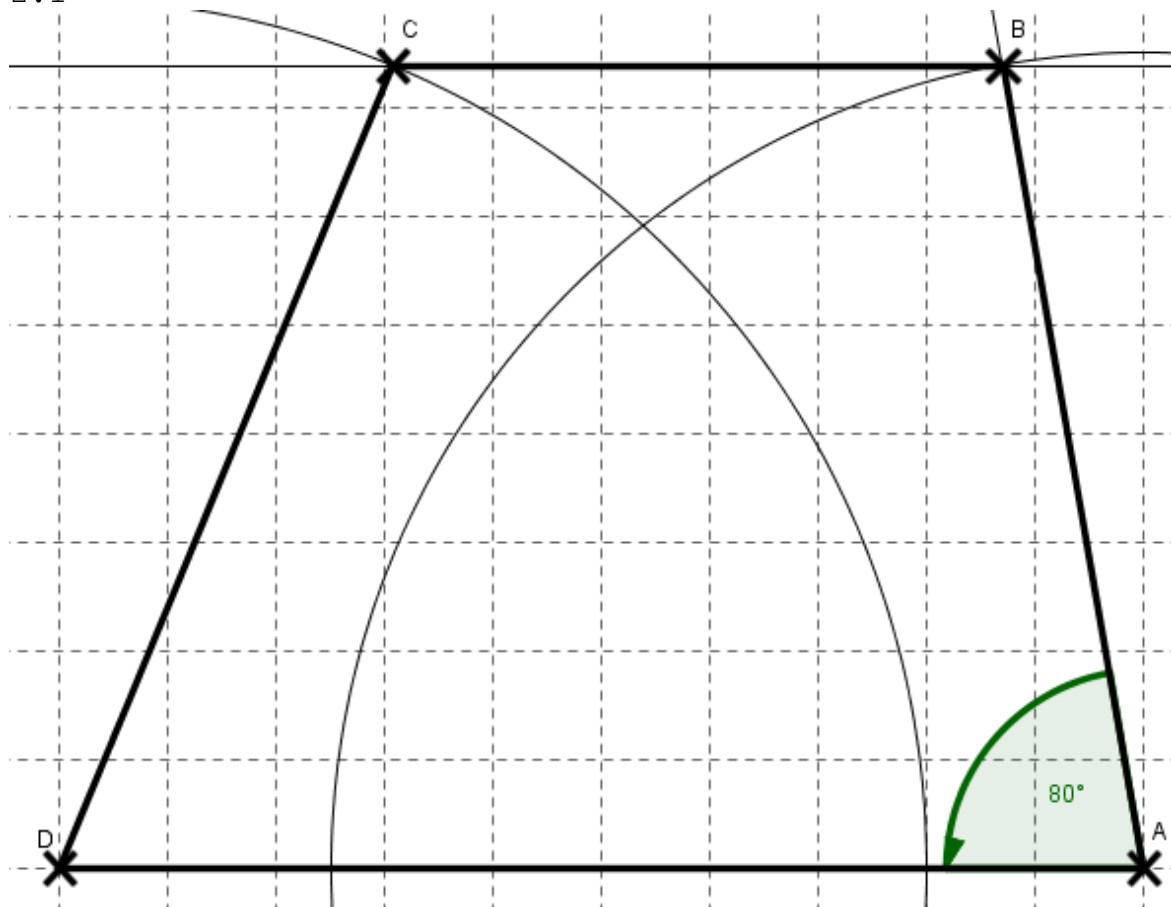
$$V = \frac{4}{6} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{6} \cdot (2 \text{ cm})^3 \cdot \pi = \underline{16,8 \text{ cm}^3}$$

Gesuchtes Volumen:

$$V = 123 \text{ cm}^3 - 10,9 \text{ cm}^3 - 16,8 \text{ cm}^3 = \underline{95,3 \text{ cm}^3}$$

Aufgabe A2:

2.1



2.2

$$\overline{BD}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{DA} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \angle BAD$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = (10^2 + 7,5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7,5 \cdot \cos 80^\circ) \text{ cm}^2 = 130,2 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 11,4 \text{ cm}$$

2.3

Vorgehen:

Das Ziel ist es, im Dreieck BCD mit dem Kosinus-Satz die gesuchte Strecke zu berechnen ($\overline{DC}$ und $\overline{DB}$ sind bekannt bzw. bereits berechnet).

Über folgenden „Umweg“ findet man den benötigten Winkel $\sphericalangle BDC$:
 $\sphericalangle ADB \rightarrow \sphericalangle CBD \rightarrow \sphericalangle DCB \rightarrow \sphericalangle DBC$

$$\overline{AB}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{DA} \cdot \overline{BD} \cdot \cos \sphericalangle ADB$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle ADB = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{DA}^2 - \overline{BD}^2}{-2 \cdot \overline{DA} \cdot \overline{BD}} = \frac{7,5^2 - 10^2 - 11,4^2}{-2 \cdot 10 \cdot 11,4} = 0,76$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle ADB = 40,4^\circ$$

$$\sphericalangle DBA = 180^\circ - 80^\circ - 40,4^\circ = 59,6^\circ$$

$$\sphericalangle CBD = 180^\circ - 80^\circ - 59,6^\circ = 40,4^\circ$$

$$\frac{\overline{DB}}{\sin \sphericalangle DCB} = \frac{\overline{DC}}{\sin \sphericalangle CBD} \Leftrightarrow \sin \sphericalangle DCB = \frac{\overline{DB} \cdot \sin \sphericalangle CBD}{\overline{DC}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle DCB = \frac{11,4 \text{ cm} \cdot \sin 40,4^\circ}{8 \text{ cm}} = 0,92 \Leftrightarrow \sphericalangle DCB = 112,5^\circ [67,5^\circ \text{ nicht möglich, siehe Konstruktion}]$$

$$\sphericalangle BDC = 180^\circ - \sphericalangle CBD - \sphericalangle DCB = 180^\circ - 40,4^\circ - 112,5^\circ = 27,1^\circ$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{DB}^2 - 2 \cdot \overline{DC} \cdot \overline{DB} \cdot \cos \sphericalangle BDC$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = (8^2 + 11,4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11,4 \cdot \cos 27,1^\circ) \text{ cm}^2 = 31,6 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 5,6 \text{ cm}$$

2.4

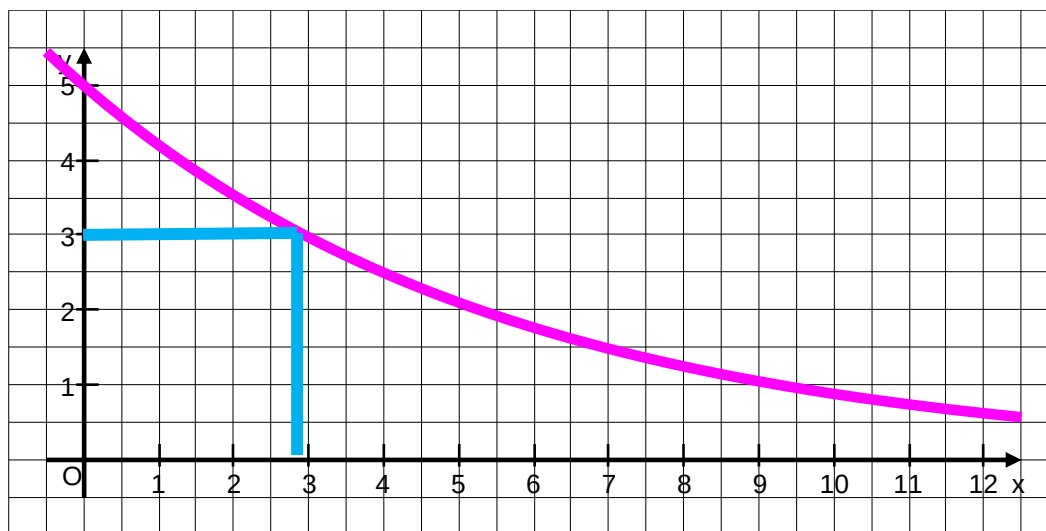
Vorgehen: Hinschreiben, was gegeben ist: Die Seiten verhalten sich so wie die Flächeninhalte. Da die Höhen h jeweils gleich lang sind (da die Dreiecksgrundseiten parallel sind), kürzen sie sich weg und der Beweis ist bereits erbracht:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{A_{ABD}}{A_{BCD}} = \frac{0,5 \cdot \overline{AD} \cdot h}{0,5 \cdot \overline{BC} \cdot h} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$$

Aufgabe A3:

3.1

x	0	2	4	6	8	10	12
$5 \cdot 0,8409^x$	5,0	3,5	2,5	1,8	1,3	0,9	0,6



3.2

Blaue Linie: Nach 3 Tagen.

3.3

16 $\triangleq$ 4 „Zerfälle“, bei denen die Hälfte übrig bleibtAlso: $0,5^4 = 0,0625 = 6,25\%$

3.4

 $Y = 1 \cdot 0,8409^x$ A: 1 Mikrogramm.

Aufgabe B1:

1.1 $S(4 \mid 7)$ $Q(-2 \mid 0,75)$ $g: y = 0,5x - 1$

$p: y = -0,25x^2 + bx + c$

Scheitelform: $y = -0,25(x - x_s)^2 + y_s$

$$\Leftrightarrow y = -0,25(x - 4)^2 + 7$$

$$\Leftrightarrow y = -0,25(x^2 - 8x + 16) + 7$$

$$\Leftrightarrow y = -0,25x^2 + 2x + 3$$

1.2

$$0,5x - 1 = -0,25x^2 + 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow -0,25x^2 + 1,5x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 4 \cdot (-0,25) \cdot 4}}{2 \cdot (-0,25)}$$

$$= \frac{-1,5 \pm \sqrt{6,25}}{-0,5} \Rightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 8 \quad \mathbb{L} = \{-2; 8\}$$

$A(-2 \mid -2)$ $C(8 \mid 3)$

1.3

$D_1(-0,5 \mid 1,9375)$

Die Gerade $g: y = 0,5x - 1$ hat die Steigung $\frac{1}{2}$. Da im Drachenviereck die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, muss jede Gerade $B_n D_n$ die Steigung -2 haben, damit gilt:
 $m_1 \cdot m_2 = -1$

1.4

Vorgehen: Drachenvierecke bestehen aus zwei gleich großen Dreiecken, daher ist die Berechnung mit Vektoren am schnellsten:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 - (-2) \\ 3 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} x - (-2) \\ -0,25x^2 + 2x + 3 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -0,25x^2 + 2x + 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{\text{Drache}}(x) = 2 \cdot A_{ACD_n} = 2 \cdot 0,5 \cdot \begin{vmatrix} 10 & x + 2 \\ 5 & -0,25x^2 + 2x + 5 \end{vmatrix} \text{ FE}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Drache}}(x) = (-2,5x^2 + 20x + 50 - 5x - 10) \text{ FE}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Drache}}(x) = (-2,5x^2 + 15x + 40) \text{ FE}$$

$$A_{\text{Drache}}(x) = -2,5x^2 + 15x + 40$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Drache}}(x) = -2,5(x^2 - 6x) + 40$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Drache}}(x) = -2,5(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 40$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Drache}}(x) = -2,5(x - 3)^2 + 62,5$$

Damit ist der maximale Flächeninhalt 62,5 FE für $x = 3$.

1.5

$$\tan 0,5 \cdot \alpha = 0,5 \Leftrightarrow 0,5 \cdot \alpha = 26,56^\circ \Leftrightarrow \alpha = 53,13^\circ$$

1.6

Vorgehen: Es muss eine Gerade gefunden werden, die durch A und D_2 verläuft. Für die Steigung wurde in 1.5 vorgearbeitet, der Punkt A ist bekannt $\rightarrow$ Punkt-Steigungs-Form $\rightarrow$ mit Parabel gleichsetzen.

$$\tan 53,13^\circ = 1,33$$

$$h: y = 1,33(x - x_p) + y_p$$

$$\Leftrightarrow y = 1,33(x - (-2)) - 2$$

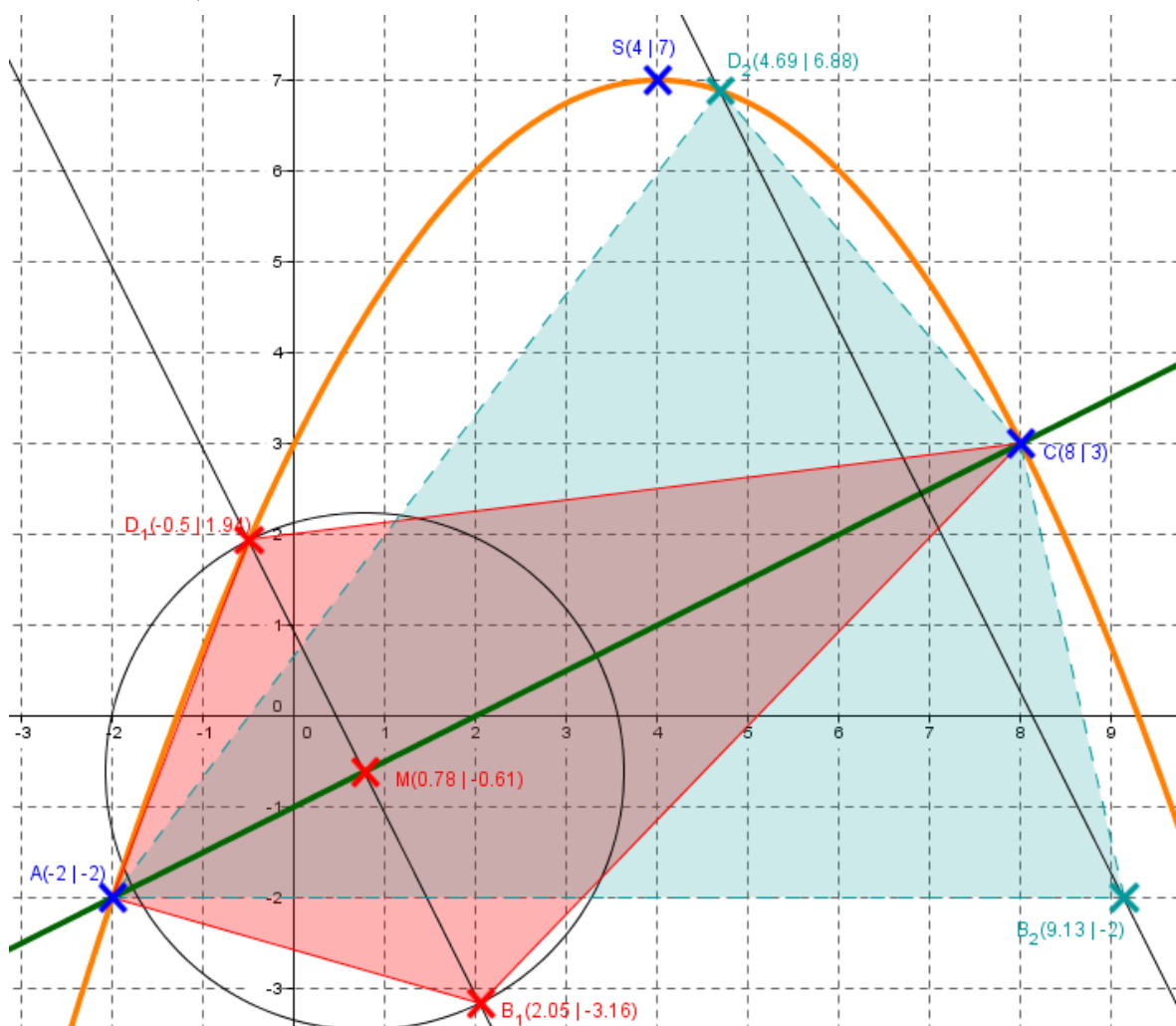
$$\Leftrightarrow y = 1,33x + 0,66$$

$$1,33x + 0,66 = -0,25x^2 + 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow -0,25x^2 + 0,67x + 2,34 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0,67 \pm \sqrt{0,67^2 - 4 \cdot (-0,25) \cdot 2,34}}{2 \cdot (-0,25)}$$

$$= \frac{-0,67 \pm \sqrt{2,7889}}{-0,5} \Rightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 4,68 \quad \mathbb{L} = \{-2, 4,68\}$$



2.4

Berechnung der Pyramidenhöhe $\overline{P_1H_1}$:

$$\sin \angle DSB = \frac{\overline{P_1H_1}}{\overline{SP_1}} \Leftrightarrow \overline{P_1H_1} = \sin \angle DSB \cdot \overline{SP_1}$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_1H_1} = \sin 48,58^\circ \cdot 6 \text{ cm} = \underline{4,5 \text{ cm}}$$

Berechnung der Pyramidengrundfläche:

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{SD}} \Leftrightarrow \overline{RQ} = \frac{\overline{ST} \cdot \overline{AC}}{\overline{SD}} = \frac{5,93 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}}{7,94 \text{ cm}} = 8,96 \text{ cm}$$

$$A_G = 0,5 \cdot \overline{RQ} \cdot \overline{ST} = 0,5 \cdot 8,96 \text{ cm} \cdot 5,93 \text{ cm} = \underline{26,57 \text{ cm}^2}$$

$$V_{RQSP_1} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot \overline{P_1H_1} = \frac{1}{3} \cdot 26,57 \text{ cm}^2 \cdot 4,5 \text{ cm} = \underline{39,85 \text{ cm}^3}$$

(A_G ungerundet verwenden, sonst ist die Lösung 39,86 cm³)

2.5

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (0,5 \cdot 12 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm}) \cdot 7,94 \text{ cm} = \underline{142,92 \text{ cm}^3}$$

$$39,85 : 142,92 = 0,2788 = 27,88 \%$$

2.6

Auch hier gilt wieder: Hinschreiben, was man weiß, und dann soweit wie möglich vereinfachen:

$$\begin{aligned} A_{TP_2S} &= 1,5 \cdot A_{TP_1S} \quad [\text{„um die Hälfte größer“} = 150 \% = 1,5] \\ \Leftrightarrow 0,5 \cdot \overline{ST} \cdot \overline{P_2S} \cdot \sin \angle DSB &= 1,5 \cdot 0,5 \cdot \overline{ST} \cdot \overline{P_1S} \cdot \sin \angle DSB \\ \Leftrightarrow \overline{P_2S} &= 1,5 \cdot \overline{P_1S} \\ \overline{P_2S} &= 1,5 \cdot 6 \text{ cm} = 9 \text{ cm} \end{aligned}$$

Kosinussatz im Dreieck DP₂S:

$$\begin{aligned} \overline{DP_2}^2 &= \overline{DS}^2 + \overline{P_2S}^2 - 2 \cdot \overline{DS} \cdot \overline{P_2S} \cdot \cos \angle DSB \\ \Leftrightarrow \overline{DP_2}^2 &= (7,94^2 + 9^2 - 2 \cdot 7,94 \cdot 9 \cdot \cos 48,58^\circ) \text{ cm}^2 = 49,49 \text{ cm}^2 \\ \Leftrightarrow \overline{DP_2} &= 7,04 \text{ cm} \end{aligned}$$