Abschlußprüfung 1996
an den Realschulen in Bayern

Mathematik II **Aufgabengruppe A**

1.0 Die Parabel p hat die Gleichung $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 5$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

1.1 Zeigen Sie rechnerisch, daß die Parabel p den Scheitelpunkt S(2|5,5) hat, und zeichnen Sie p in ein Koordinatensystem. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle für $x \in [-4;8]$ in Schritten von $\Delta x = 2$.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \le x \le 9$; $-1 \le y$ 7

1.2 Punkte $D_n(x|-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 5)$ und C_n auf der Parabel p sind für $-4 \le x \le 4$ zusammen mit den Punkten A(–2|0) und B(4|0) die Eckpunkte von Vierecken ABC_nD_n. Dabei ist die Abszisse der Punkte C_n stets um 4 größer als die Abszisse x der Punkte D_n.

Zeichnen Sie das Viereck ABC_1D_1 für x = –1 in das Koordinatensystem zu 1.1 ein, und ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte D_n.

[Teilergebnis: $C_n(x + 4|-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 5$]

1.3 In dem Viereck ABC_2D_2 hat der Winkel BAD_2 das Maß 58°. Zeichnen Sie dieses Viereck in das Koordinatensystem zu 1.1 ein, und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C_2 und D_2. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

1.4 Berechnen Sie den Flächeninhalt A(x) der Vierecke ABC_nD_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte D_n.

$\left[\text{Ergebnis:} \quad A(x) = (-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 25)\ \text{FE}\right]$

1.5 Unter den Vierecken ABC_nD_n gibt es ein Trapez ABC_3D_3 mit $[AB] \parallel [C_3D_3]$.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D_3.

Das Viereck ABC_4D_4 ist flächengleich zum Trapez ABC_3D_3.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_4.

2.0 Das Dreieck PQR hat die Seitenlängen $\overline{PQ} = 14\,\text{cm}$, $\overline{PR} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{QR} = 7{,}5\,\text{cm}$.

2.1 Zeichnen Sie das Dreieck PQR. Berechnen Sie sodann das Maß α des Winkels QPR auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

[Teilergebnis: $\alpha = 31{,}10°$]

2.2 Der Punkt E auf der Seite [PQ] ist der Mittelpunkt eines Kreises k mit dem Radius 3 cm, der die Seite [PR] im Punkt D berührt. Der Kreis k schneidet die Strecke [EQ]

Bitte wenden!

im Punkt F und die Strecke [PE] im Punkt G.
Zeichnen Sie die Punkte E und D, den Kreis k sowie die Punkte F und G in die Zeichnung zu 2.1 ein.

2.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Figur, die vom Kreisbogen FD und den Strecken [FQ], [QR] und [RD] begrenzt wird.
Berechnen Sie sodann den prozentualen Anteil von A am Flächeninhalt des Dreiecks PQR. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

2.4 Der Eckpunkt S des Dreiecks EQS liegt auf dem Kreis k mit $\angle$ ESQ = 90°.
Zeichnen Sie das Dreieck EQS in die Zeichnung zu 2.1 ein. Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{PE}$ und sodann das Maß ε des Winkels SQE.
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

[Teilergebnis: $\overline{PE}$ = 5,81 cm]

3.0 Gegeben ist das Quadrat ABCD mit 10 cm langen Seiten. Die Viertelkreisbögen E_nF_n mit E_n auf [BC] und F_n auf [AB] haben B als Mittelpunkt und die Radien $\overline{BE_n}$ = x cm ($0 < x < 10$ und $x \in \mathbb{R}$).
Die Viertelkreisbögen G_nE_n mit G_n auf [DC] haben den Mittelpunkt C.

3.1 Zeichnen Sie das Quadrat ABCD mit den beiden Viertelkreisbögen E_1F_1 und G_1E_1, die man für x = 7,5 erhält.

3.2 Zeigen Sie rechnerisch, daß der Umfang der von den Viertelkreisbögen E_nF_n und G_nE_n sowie den Strecken $[G_nD]$, [DA] und $[AF_n]$ begrenzten Figuren stets gleich ist.

3.3 Die in 3.2 beschriebenen Figuren rotieren um BC als Achse.
Berechnen Sie das Volumen V(x) der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von x.

$$\left[\text{Ergebnis: } V(x) = 20\pi \cdot \left(-x^2 + 10x + \frac{50}{3}\right)\text{cm}^3\right]$$

3.4 Berechnen Sie den Wert für x, so daß der zugehörige Rotationskörper das größtmögliche Volumen V_{max} besitzt, und geben Sie V_{max} an.

$$\left[\text{Teilergebnis: } V_{max} = \frac{2500\pi}{3}\ \text{cm}^3\right]$$

3.5 Berechnen Sie, um wieviel Prozent das Volumen des Rotationskörpers für x = 7,5 kleiner ist als V_{max}. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Abschlußprüfung 1996
an den Realschulen in Bayern

Mathematik II **Aufgabengruppe B**

1.0 Die Parabel p mit der Gleichung $y = \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 - 3$ ist der Graph der Funktion f, die Gerade g hat die Gleichung y = 1,5x – 2,5 ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

1.1 Tabellarisieren Sie f für $0 \leq x$ 8 in Schritten von $\Delta x = 1$, und zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g in ein Koordiniatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 11$; $-4 \leq y \leq 11$

1.2 Die Parabel p und die Gerade g schneiden sich in den Punkten P(1|–1) und Q(8|9,5). Die Punkte $A_n(x|\frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 - 3)$ auf der Parabel p zwischen den Punkten P und Q und die Punkte C_n auf der Geraden g haben jeweils dieselbe Abszisse x. Sie sind zusammen mit den Punkten B_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_nB_nC_n$ mit $\overrightarrow{A_nB_n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1B_1C_1$ für x = 1,5 und $A_2B_2C_2$ für x = 6 in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

1.3 Die Winkel $B_nA_nC_n$ haben stets das gleiche Maß α. Berechnen Sie α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

1.4 Zeigen Sie, daß für die Seitenlänge $\overline{A_nC_n}(x)$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_nC_n}(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5x - 4\right)$ LE. Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Dreiecks $A_3B_3C_3$ mit der größtmöglichen Seitenlänge $\overline{A_3C_3}$.

1.5 Die Dreiecke $A_4B_4C_4$ und $A_5B_5C_5$ sind gleichschenklig mit $[B_4C_4]$ bzw. $[B_5C_5]$ als Basis. Berechnen Sie die zugehörigen Werte für x.
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

1.6 Die Dreiecke $A_6B_6C_6$ und $A_7B_7C_7$ sind bei C_6 bzw. C_7 rechtwinklig. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C_6 und C_7.

2.0 Auf einem viereckigen Grundstück ABCD ist die Entfernung zweier Grenzpfosten C und D nicht unbehindert meßbar. Um die Länge der Strecke [DC] zu bestimmen, wurden von den zwei für die Messung günstig gelegenen Punkten A und B aus die folgenden Größen ermittelt: $\overline{AB}$ = 51m, $\overline{AD}$ = 45m, $\overline{BC}$ = 75m, $\angle$ BAD = 59°, $\angle$ CBA = 108°.

2.1 Zeichnen Sie das Grundstück ABCD im Maßstab 1 : 1000.

2.2 Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{BD}$ und das Maß ε des Winkels DBA.
(Auf eine Stelle nach dem Komma runden.)

[Ergebnis: $\overline{BD}$ = 47,6 m; ε = 54,1°]

Bitte wenden!

2.3 Berechnen Sie die Entfernung $\overline{DC}$ der Grenzpfosten D und C und den Flächeninhalt A des Grundstücks ABCD.
(Auf eine Stelle nach dem Komma runden.)

[Ergebnis: $\overline{DC} = 60{,}7$ m; A = 2425,9 m^2]

2.4 Der Kreis k mit $\overline{DC}$ als Durchmesser hat den Mittelpunkt M und schneidet die Strecke [BC] im Punkt E. Zeichnen Sie den Kreis k und die Strecke [ME] in die Zeichnung zu 2.1 ein.
Der Grundstücksteil innerhalb des Kreises k ist mit Sträuchern bepflanzt, der restliche Teil des Grundstücks ist von Rasen bedeckt. Berechnen Sie die Größe der Rasenfläche. (Auf eine Stelle nach dem Komma runden.)

3.0 Im gleichschenkligen Dreieck ABC hat die Basis [BC] die Länge 10 cm, und die Höhe [AM] ist 11 cm lang. Das Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide ABCS, deren Spitze S senkrecht über M liegt mit $\overline{MS} = 5\sqrt{3}$ cm.

3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCS. Dabei soll [AM] auf der Schrägbildachse liegen.

Für die Zeichnung: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$

Berechnen Sie sodann das Maß α des Winkels MAS auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und die Länge der Seitenkante [AS].

[Teilergebnis: $\alpha = 38{,}21°$; $\overline{AS} = 14$ cm]

3.2 Die Punkte Q_n sind die Endpunkte von Strecken $[AQ_n]$, die durch Verlängerung der Strecke [AM] um x cm über M hinaus entstehen. Die Punkte P_n liegen auf der Seitenkante [AS] in 2x cm Entfernung von S. Es gilt: $0 < x < 7$ und $x \in \mathbb{R}$.
Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden ABQ_nCP_n.
Zeichnen Sie die Pyramide ABQ_1CP_1 für x = 2,5 zusammen mit der Pyramidenhöhe $[P_1F_1]$ in das Schrägbild zu 3.1 ein.

3.3 In der Pyramide ABQ_2CP_2 hat der Winkel AP_2Q_2 das Maß 90°. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

3.4 Zeigen Sie durch Rechnung, daß für die Höhen $\overline{P_nF_n}(x)$ der Pyramiden ABQ_nCP_n in Abhängigkeit von x gilt: $\overline{P_nF_n}(x) = \frac{5\sqrt{3}}{7} \cdot (7 - x)\,\text{cm}$.

Weisen Sie sodann rechnerisch nach, daß sich das Volumen V(x) der Pyramiden ABQ_nCP_n in Abhängigkeit von x wie folgt darstellen läßt:

$$V(x) = \frac{25\sqrt{3}}{21} \cdot (-x^2 - 4x + 77)\,\text{cm}^3.$$

3.5 Überprüfen Sie rechnerisch, ob es unter den Pyramiden ABQ_nCP_n eine Pyramide gibt, die das gleiche Volumen wie die Pyramide ABCS hat.