Abschlußprüfung 1995
an den Realschulen in Bayern

Mathematik II **Aufgabengruppe A**

1.0 Die Punkte A(–1|–1) und C(4|4) liegen auf einer Parabel p_1 mit der Gleichung $y = -x^2 + 4x + 4$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Die Parabel p_2 hat eine Gleichung der Form $y = 0{,}5x^2 + bx + c$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $b, c \in \mathbb{R}$) und verläuft ebenfalls durch die Punkte A und C.

1.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S_1 der Parabel p_1, und zeichnen Sie p_1 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1cm; $-3 \le x \le 6$; $-3 \le y \le 9$

1.2 Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel p_2. Zeichnen Sie die Parabel p_2 mit Hilfe einer Wertetabelle für $x \in [-2\,;\,5]$ in Schritten von $\Delta x = 1$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.
[Teilergebnis: p_2 mit $y = 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 2$]

1.3 Punkte $D_n(x \mid -x^2 + 4x + 4)$ auf der Parabel p_1 zwischen den Punkten A und C sind zusammen mit den Punkten A und C die Eckpunkte von Dreiecken ACD_n. Zeichnen Sie das Dreieck ACD_1 für x = 1 in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

1.4 Die Gerade g hat die Gleichung $y = 0{,}5x - 2{,}5$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
Zeigen Sie rechnerisch, daß die Gerade g Tangente an die Parabel p_2 ist, und berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes B.
[Teilergebnis: B(1 | –2)]

1.5 Der Punkt B ist Eckpunkt von Vierecken $ABCD_n$, von denen das Viereck $ABCD_0$ den größtmöglichen Flächeninhalt A_{max} besitzt. Berechnen Sie A_{max}.
[Teilergebnis: $A(x) = (-2{,}5x^2 + 7{,}5x + 17{,}5)$ FE]

1.6 Das Viereck $ABCD_2$ ist ein Trapez mit $[BC] \parallel [AD_2]$.
Zeichnen Sie das Trapez $ABCD_2$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein, und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D_2.

2.0 Der Punkt A(–4 | 1) ist der Schnittpunkt der beiden Geraden g mit $y = \frac{1}{4}x + 2$ und h mit $y = x + 5$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Die Punkte C_n auf der Geraden h haben eine um 2 größere Abszisse als die Punkte $B_n(x \mid \frac{1}{4}x + 2)$ auf der Geraden g. Dabei soll stets $x \ge -4$ gelten . Die Punkte B_n und C_n legen Strecken $[B_nC_n]$ fest.

2.1 Zeichnen Sie die Geraden g und h sowie die Strecken $[B_1C_1]$ für x = 0 und $[B_2C_2]$ für x = 3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \le x \le 7$; $-1 \le y \le 11$

2.2 Zeigen Sie rechnerisch, daß sich die Streckenlänge $\overline{B_nC_n}(x)$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n wie folgt darstellen läßt:

$\overline{B_nC_n}(x) = \sqrt{\frac{9}{16}x^2 + \frac{15}{2}x + 29}$ LE
[Teilergebnis: $C_n(x + 2 \mid x + 7)$]

2.3 Die Strecke $[B_3C_3]$ ist $2\sqrt{17}$ LE lang. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_3.

2.4 Berechnen Sie das Maß ε des Winkels DAB_1 mit $D(0 \mid 1)$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Die Gerade g schließt mit der Strecke $[B_4C_4]$ eine Winkel mit dem Maß 55° ein. Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes B_4.
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Teilergebnis: $\varepsilon = 14{,}04°$]

3.0 Die Raute ABCD mit den Diagonalenlängen $\overline{AC}$ = 12 cm und $\overline{BD}$ = 16 cm ist die Grundfläche der Pyramide ABCDS, deren Spitze S senkrecht über dem Punkt A mit $\overline{AS}$ = 8 cm liegt. Die Diagonalen [AC] und [BD] schneiden sich im Punkt M. Die Punkte E_n liegen auf der Strecke [MC] und die Punkte F_n auf der Seitenkante [CS]. Es gilt $\overline{ME_n} = \overline{SF_n} = x$ cm ($x \leq 6$; $x \in \mathbb{R}_0^+$).
Die Punkte F_n sind die Spitzen der Pyramiden ABE_nF_n.

3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. Dabei soll [AC] auf der Schrägbildachse liegen. Zeichnen Sie sodann die zu x = 3,5 gehörige Pyramide ABE_1F_1 in das Schrägbild ein.

Für die Zeichnung: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$

3.2 Berechnen Sie das Maß γ des Winkels SCA und sodann die Länge der Seitenkante $[AF_1]$ der Pyramide ABE_1F_1. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Teilergebnis: $\gamma = 33{,}69°$]

3.3. Unter den Pyramiden ABE_nF_n gibt es eine Pyramide ABE_2F_2, bei der der Winkel E_2BA das Maß 70° hat. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Ergebnis: x = 5,22]

3.4 Berechnen Sie das Volumen V_2 der Pyramide ABE_2F_2 und sodann den prozentualen Anteil von V_2 am Volumen V der Pyramide ABCDS.
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Abschlußprüfung 1995

an den Realschulen in Bayern

Mathematik II **Aufgabengruppe B**

1.0 Die Parabel p ist der Graph der Funktion f mit der Gleichung $y = 0{,}25x^2 + x - 4$, die Gerade g hat die Gleichung $y = 0{,}5x + 2$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

1.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S der Parabel p.
Tabellarisieren Sie f für $x \in [-7\,;\,5]$ mit $\Delta x = 1$, und zeichnen Sie sodann die Parabel p und die Gerade g in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: $-8 \leq x \leq 6$; $-6 \leq y \leq 8$

1.2 Die Punkte $A_n(x \mid 0{,}25x^2 + x - 4)$ auf der Parabel p und die Punkte D_n auf der Geraden g sind für $-6 < x < 4$ und $x \in \mathbb{R}$ Eckpunkte von Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$. Die Punkte A_n und D_n haben jeweils dieselbe Abszisse x.

Die Punkte C_n sind die Spitzen der Pfeile $\overrightarrow{D_nC_n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie die

Parallelogramme $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -4{,}5$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = -1$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

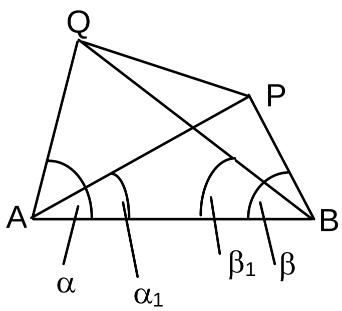
1.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt A(x) der Parallelogramme $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.
[Ergebnis: $A(x) = (-0{,}75x^2 - 1{,}5x + 18)$FE]

1.4 Unter den Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$ hat das Parallelogramm $A_0B_0C_0D_0$ den größtmöglichen Flächeninhalt A_{max}. Berechnen Sie A_{max}.

1.5 Unter den Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es zwei Rauten $A_3B_3C_3D_3$ und $A_4B_4C_4D_4$. Berechnen Sie die x-Koordinaten der Eckpunkte A_3 und A_4 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

1.6 Bei den Parallelogrammen $A_5B_5C_5D_5$ und $A_6B_6C_6D_6$ liegen die Eckpunkte B_5 und B_6 auf der x-Achse. Berechnen Sie die x-Koordinaten der Eckpunkte A_5 und A_6.

2.0 Die Entfernung $\overline{PQ}$ von schwer zugänglichen Punkten P und Q in ebenem Gelände soll bestimmt werden. Dazu werden zwei Standorte A und B im Gelände so gewählt, daß die Punkte A, B, P und Q die Eckpunkte eines Vierecks ABPQ sind. Folgende Größen werden gemessen (siehe nebenstehende, nicht maßstabsgetreue Zeichnung):



$\overline{AB} = 100$ m; $\angle BAQ = \alpha = 75°$; $\angle BAP = \alpha_1 = 32°$;
$\angle PBA = \beta = 65°$; $\angle QBA = \beta_1 = 40°$.

2.1 Zeichnen Sie das Viereck ABPQ im Maßstab 1:1000.

2.2 Berechnen Sie die Längen $\overline{AP}$ und $\overline{AQ}$ und sodann die Entfernung $\overline{PQ}$.
(Auf eine Stelle nach dem Komma runden.)
[Teilergebnisse: $\overline{AP} = 91{,}3$ m; $\overline{AQ} = 70{,}9$ m]

2.3 Der Kreis k mit dem Mittelpunkt P und dem Radius 40 m schneidet [PB] im Punkt S und [PQ] im Punkt R. Zeichnen Sie den Bogen RS des Kreises k in die Zeichnung zu 2.1 ein.

2.4 Das von dem Bogen RS und den Strecken [SB], [BA], [AQ], [QR] begrenzte Gelände wird als Freizeitpark angelegt. Berechnen Sie den Flächeninhalt A dieses Geländes. (Auf eine Stelle nach dem Komma runden.)
[Teilergebnis: $\angle$ QPB = 133,8°]

2.5 Die Stelle D am Schnittpunkt von [AP] und [BQ] ist als Brunnenstandort vorgesehen. Berechnen Sie dessen Abstand d von [AB].
(Auf eine Stelle nach dem Komma runden.)

3.0 Das Quadrat ABCD mit der Diagonalenlänge 10 cm ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Schnittpunkt M der Diagonalen des Quadrats ABCD mit $\overline{MS}$ = 10 cm.

3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. Dabei soll [AC] auf der Schrägbildachse liegen.
Für die Zeichnung: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$

3.2 Berechnen Sie das Maß α des Winkels CAS sowie die Kantenlänge $\overline{AS}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\overline{AS}$ = 11,18 cm]

3.3 Wenn man die Diagonale [AC] der Grundfläche ABCD von A und von C aus um jeweils x cm ($x < 5$ und $x \in \mathbb{R}^+$) verkürzt, so entstehen neue Pyramiden A_nBC_nDS. Zeichnen Sie die Pyramide A_1BC_1DS für x = 2,5 in das Schrägbild zu 3.1 ein. Berechnen Sie das Maß φ des Winkels A_1SB und die Oberfläche O der Pyramide A_1BC_1DS. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Teilergebnis: φ = 29,80°]

3.4 Der Punkt P_1 liegt auf der Seitenkante $[A_1S]$; dabei gilt: $\overline{A_1P_1}$ = 5 cm. Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{P_1C_1}$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

3.5 In der Pyramide A_2BC_2DS hat der Winkel A_2SC_2 das Maß 40°. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.